SC. 5. pl. 7.

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA VITT. EMANUELE ROMA
37
47 A
14

BB
1
26

MAG 3391



[redacted]

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ

CUM APPENDICE

DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM

AUCTORE

PAULINO A S. JOSEPHO LUCENSI
Cler. Reg. Scholarum Piarum & in Archigymn. Romano Eloquentiæ Profeſſore.

ROMÆ MDCCXLIII.

TYPIS JOANNIS ZEMPEL PROPE MONTEM JORDANUM
PRÆSIDUM FACULTATE.

[redacted]

Digitized by Google

DEO OPT. MAX.

Scientiarum Parenti
ac Domino,
Qui Unus & Trinus
Omnia diſpoſuit
In menſura & numero
& pondere,
Opellæ hujus auctor
Hanc, ſe, ſuaque omnia

D. D. D.

Digitized by Google

AD LECTOREM.

PAuci ſunt, qui de Arithmetica recte judicent. Ea pleriſque vileſcit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expenſique tabulas conficiunt, artem eſſe putent. At longe aliter de illa viri ſapientes judicarunt. Plato quidem in Epinomide affirmat, ſine Arithmetica neque ullam ſcientiam, neque ipſam hominum ſocietatem poſſe conſiſtere. Ariſtotiles autem exiſtimabat, tam proprium eſſe hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Auguſtinus, qui frequentiſſime ſuis in libris, præſertim ve-

Digitized by Google

ro de Doctrina Chriſtiana, praeclare de Arithmetica loquitur, multiſque exemplis oſtendit, ob numerorum inſcitiam, plurima in ſacris literis ignorari? In eadem prorſus ſententia fuerunt D. Hieronymus, ut ex lib. 2. contra Jovinianum, aliiſque ex locis palam eſt; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui D. Baſilium præceptorem ſuum ſummis laudibus celebrat, quod is numerorum ſcientia ad ſacræ Scripturæ intelligentiam, aliaſque diſciplinas ſibi viam muniviſſet. Illud certe negari non poteſt, ab iis, qui Arithmeticæ ſtudia contemnunt, Geometriæ quoque, ac veræ Phyſicæ ſtudia, hoc eſt diſciplinarum omnium ſuccum, & ſanguinem, contemni omnino oportere; cum fieri non poſſit, ut hæc, quæ mirabili quodam ordine ac numerorum proportione inter ſe cohærent, ſine ſcientia numerorum intelligi valeant. Quis enim ſine calculis comprehendat motus quantitatem ac leges, quadrata temporum, triplicatas corporum ſimilium rationes, reſiſtendi vires, ſonorum velocitates, liquidorum æquilibria, ac ſexcenta alia, quibus non intellectis, naturalem omnem ſcientiam eum latere neceſſe eſt? Itaque non immerito Plato in lib. 7. de Repub. Arithmeticam

vocat

vocat veſtibulum ſcientiarum, quod ſcilicet numerorum tractatione ſpeculationibus difficilioribus animus aſsueſcit, & ad reliquos ſcientiæ ſatus excipiendos mirum in modum præparatur. Imo ex ipſa numerandi vi fauſtum ad ceteras diſciplinas progreſsum auguratur. *Homines*, inquit, *natura Arithmetici ad omnes doctrinas acuti videntur*. Hinc eſt, quod multi in omni memoria viri doctiſſimi in ordinandis, illuſtrandiſque Arithmeticæ elementis deſudarunt, quod eorum utilitatem, ſummamque neceſſitatem probe noſſent. Ex præclaris eorum inventis ego triginta & amplius ab hinc annis ea decerpſi in uſum ſtudioſæ Juventutis Collegii Nazareni, quæ magis ad Juvenum ingenium apta, & ad Matheſeos ſtudia neceſſaria eſſe judicavi. Semper enim illis viginti & uno annis, quibus nobiles ejuſdem Collegii adoleſcentes in Mathematicis diſciplinis inſtitui, Arithmeticæ ſtudium præmiſi, cujus ope tum II., tum V. & VI. Elementorum Euclidis propoſitiones facile ab illis percipi experientia comperi, contra vero Arithmetica deſtitutos in ipſis diu, multoque labore verſari. Cum autem decurſu temporis in ea ſcripta per manus tradita multa menda, ut fieri ſolet, irrepſiſſent, mul-

toque

toque labore ac tempore in illis tranſcribendis opus eſſet, res non inutilis viſa eſt, illa typis emittere; eaque occaſione adjecta eſt de natura atque uſu Logarithmorum Appendix, quam pariter in gratiam eorum adoleſcentium jampridem adornaveram; tum etiam nonnulla alia, quæ ad quæſtiones aliquot Arithmeticæ practicæ pertinent, quæ ſane in vita civili haud ſemel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præcepti brevitate, & exemplorum copia ſatis claræ eſſe videntur, accedunt quoque demonſtrationes, quales in hujus ſcientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propoſitionem citare, aut ſupponere, opportunum viſum eſt. Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam, & vulgarem putavi: demonſtrationes autem adhibere ex Euclidis elementis VII., VIII., & IX., vel etiam ab Analyſeos ſpecioſæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti noſtræ rem immaturam. An vero in medio conſtiterim, ſapientum eſto judicium.

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE

Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Scholar. Piar.

PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUm librum, cui titulus INSTITUTIONES ARITHMETICÆ CUM APPENDICE DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM, a P. Paulino a S. Joſeph Aſſiſtente noſtro Generali duo ex noſtris, quibus commiſſum fuit, recognoverint, atque approbaverint; ut typis mandetur, ſi iis, ad quos ſpectat ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus noſtris Scholarum Piarum apud S. Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

Joſeph ab Angelo Cuſtode
Præp. Generalis.

Laurentius a S. Hyacintho Secret.

IMPRIMATUR.

Si videbitur Reverendiſſimo Patri Magiſtro Sacri Palatii Apoſtolici.

F. M. de Rubeis Archiep. Tarſ. Viceſg.

APPROBATIO.

LIbrum, cui titulus INSTITUTIONES ARITHMETICÆ CUM APPENDICE DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM ab Adm. R. P. Paulino a S. Joſepho Cler. Reg. Scholarum Piarum Aſſiſtente Generali concinnatum, de mandato Rm̃i P. Sacri Palatii Apoſtolici Magiſtri, diligenter legi. In eo nihil inveni bonis moribus, ſive Catholicæ Religioni repugnans, verum in inſtituendis Tyronibus in valde neceſſaria numerorum facultate brevem, dilucidam, & concinnam methodum obſervavi. Ideo digniſſimum utiliſſimumque puto, ut typis ad cujuſcunque commodum conſignetur. Romæ v. Kal. Januarii MDCCXLIII.

Franciſcus Xaverius Brunetti.

AP-

APPROBATIO

JUbente Rmo Sac. Palatii Magiſtro, legi diligenter librum, cui titulus INSTITUTIONES ARITHMETICÆ CUM APPENDICE DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM: in eoque non ſolum nihil reperi ſanæ Fidei boniſve moribus adverſum, ſed univerſam Arithmeticam breviter, & perſpicue expoſitam. Quare Inſtitutiones illas publici juris digniſſimas cenſeo. In quorum fidem &c. Datum Romæ in Conventu SS. Trinitatis die 9. Maij an. 1743.

Fr. Franciſcus Jacquier ex Minim. Familia Soc. Inſtitut. Bononien., & bonarum artium Academ. Lugdunen.

IMPRIMATUR

Fr. Aloyſius Nicolaus Ridolfi Sac. Pal. Apoſt. Mag. Ord. Prædicatorum.

INDEX

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

Definitiones. pag. 1.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

Prop. I.	Dati numeri valorem exprimere.	p. 3.
Prop. II.	De additione Integrorum.	p. 6.
Prop. III.	Additionem examinare.	p. 9.
Prop. IV.	De Subtractione Integrorum.	p. 11.
Prop. V.	De Multiplicatione Integrorum.	p. 14.
Prop. VI.	De Diviſione Integrorum.	p. 19.
Prop. VII.	De Diviſione Integrorum per numeros diviſoris multiplices.	p. 27.

CAPUT II.

De Calculo Denominatorum.

Prop. I.	De additione numerorum denominatorum.	p. 30.
Prop. II.	De ſubtractione numerorum denominatorum.	p. 33.
Prop. III.	De multiplicatione numerorũ denominatorum.	p. 35.
Prop. IV.	De diviſione numerorum denominatorum.	p. 37.

CAPUT III.

De Calculo Fractorum.

Definitiones. p. 39.
Axiomata. p. 41.
Prop. I. Datis duobus numeris, maximam eorum communem menſuram invenire. p. 42.
Prop. II. Fractiones ad minimos terminos reducere. p. 44.
Prop. III. Fractiones ad idem nomen reducere. p. 44.
Prop. IV. Fractionem ad aliam dati nominis, & ejuſdem valoris revocare. p. 47.
Prop. V. Fractiones ad integra revocare. p. 48.
Prop. VI. Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere. p. 49.
Prop. VII. Fractionem fractionis ad ſimplicem fractionem reducere. p. 50.
Prop. VIII. Fractiones addere. p. 51.
Prop. IX. Fractiones ſubtrahere. p. 51.
Prop. X. Fractiones multiplicare. p. 52.
Prop. XI. Fractiones dividere. p. 54.

CAPUT IV.

De Extractione Radicum.

Prop. I. Ex dato numero radicem quadratam, ſeu ſecundam extrahere. p. 57.
Prop. II. Radicem quadratam per approximationem inquirere. p. 63.
Prop. III. Ex dato numero radicem cubicam extrahere. p. 64.

CA-

Digitized by Google

CAPUT V.

De Regulis Arithmeticis.

Definitiones. p. 68.
Prop. I. De regula Proportionum. p. 70.
Prop. II. De regula Proportionum Compoſita. p. 73.
Prop. III. De regula Proportionum Inverſa. p. 74.
Prop. IV. Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia. p. 77.
Prop. V. De regula Societatis. p. 79.
Prop. VI. De regula Alligationis. p. 82.
Prop. VII. De regula ſimplicis Poſitionis, ſeu falſi. p. 86.
Prop. VIII. De regula duplicis Poſitionis. p. 88.
Prop. IX. Aurificis furtum in corona Hieronis Regis detegere. p. 93.
Prop. X. Datis duobus numeris tertium proportionalem invenire. p. 95.
Prop. XI. Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire. p. 96.
Prop. XII. Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire. p. 97.
Prop. XIII. Quæſtiones aliquot practicæ expediuntur. p. 98.

CAPUT VI.

De Progreſſionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

Lemmata. p. 103.
Prop. I. Datis minimo ac maximo progreſſionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire ſummam. p. 104.
Prop. II. Datis terminis maximo & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire. p. 106.

Prop.

Prop. III. Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum. p. 106.
Prop. IV. Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire. p. 107.

De Progreſſionibus Geometricis.

Prop. V. Datis minimo & maximo progreſſionis Geometricæ terminis, ac denominatore, ſummam terminorum invenire. p. 110.
Prop. VI. Datis aliquot progreſſionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire. p. 112.
Prop. VII. Afferuntur nonnullæ progreſſionis Geometricæ quæſtiones. p. 113.
Prop. VIII. Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire. p. 116.
Prop. IX. Ex dato rerum numero permutationes omnes poſſibiles invenire. p. 117.
Prop. X. Proponuntur aliqua permutationum problemata. p. 119.
Prop. XI. Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus tres numeros Harmonice proportionales invenire. p. 120.
Prop. XII. Datis duobus numeris, tertium Harmonice proportionalem invenire. p. 121.
Prop. XIII. Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione. p. 121.

APPENDIX

De Logarithmis, eorumque natura atque uſu.

Lemmata. p. 123.
Prop. I. De natura Log-morum eorumque inventione. p. 124.
Prop. II. Si Log-mus unitatis ſit o, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum. p. 126.

Prop.

Prop. III. Si Log-mus unitatis eſt o, differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum. p. 127.
Prop. IV. Numeri cujuſcunque Log-mum invenire. p. 128.
Prop. V. Multiplicare duos numeros, qui minores ſint quam 10000. p. 132.
Prop. VI. Numerum integrum minorem, quam 10000 per alium dividere. p. 132.
Prop. VII. Datis tribus numeris, quartum proportionalem invenire. p. 133.
Prop. VIII. Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, ſed numerum 10,000,000 non excedentibus. p. 133.
Prop. IX. Datæ fractionis Log-mum invenire. p. 136.
Prop. X. Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non exiſtit, invenire numerum ei reſpondentem. p. 138.
Prop. XI. Dato Log-mo defectivo, numerum ei reſpondentem invenire. p. 139.
Prop. XII. Dato Log-mo excedente Log-mum 4.0000000, numerum ei congruum invenire. p. 140.
Prop. XIII. Dati cujuſcunque ſinus Log-mum invenire. p. 142.
Prop. XIV. Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium dati arcus. p. 143.
Probl. I. Dati numeri quadratum, vel cubum per Log-mos invenire. p. 147.
Probl. II. Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales. p. 148.
Probl. III. Quæſtiones aliquot Arithmeticæ per Log-mos expediuntur. p. 150.
Probl. IV. Data tormenti bellici elevatione, diſtantiam ictus invenire, & e converſo. p. 155.
Probl. V. Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire. p. 156.
Probl. VI. In linea meridiana Zodiaci ſigna deſcribere. p. 158.

IN-

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

DEFINITIONES.

I. A*RITHMETICA* eſt ſcientia numerorum, cujus partes ſunt quatuor: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio*.

II. *Unitas* eſt denominatio, per quam aliqua res dicitur una.

III. *Numerus* eſt unitatum multitudo, proinde unitas non eſt numerus, ſed numeri principium, ſicuti punctum eſt principium lineæ.

IV. *Numeri ſimplices* ſunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. His additur cyphra 0, quæ per ſe nihil ſignificat, ſed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.

V. *Numeri compoſiti* ſunt numeri majores denario, incluſo ipſo denario, ſcilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.

Digitized by Google

VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor metitur majorem, hoc eſt cum minor aliquoties ſumptus majori æqualis fit; ſeu cum major minorem aliquoties præciſe continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2 ſexies ſumptus æqualis fit ipſi 12; ſeu quia 12 ſexies præciſe continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri eſt, quæ numerum metitur, pars *aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4, dicuntur pars aliquota numeri 12; at vero 5 pars aliquanta ipſius, quia aliquoties ſumpta vel ipſum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter ſe primi ſunt*, quos nulla communis menſura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* eſt habitudo, ſeu ratio quædam unius numeri ad alterum, ſecundum quod unus alterius eſt multiplex, vel pars, ſeu partes; ſic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, ſeu ſemiſſis, 3 ad 9 rationem tertiæ partis &c.

X. *Numeri homogenei* ſunt illi, quorum unitates eandem rem ſignificant.

XI. *Numeri heterogenei*, ſeu *denominati* ſunt, qui variis nominibus denominantur, hoc eſt res diverſas ſignificant; ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri* alii ſunt *integri*, alii *fracti*, qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, ſeu unitatis, de quibus in Cap. III.

CA-

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Dati numeri valorem exprimere.

I. SIT exprimendus numerus datus *A*. Dividatur in periodos, ſecernendo virgula ternas quaſcunque figuras, incipiendo a dextera; diviſus erit numerus *A* in tres periodos, ſeu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas: ſed prima dextrorſum continet unitates, decades, & centenas ſimpliciter; ſecunda vero continet unitates, decades, & centenas millium: tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

A 394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo ſiniſtrorſum, & progrediendo verſus dexteram ſic: trecenti nonaginta quatuor milliones, octingenta ſeptuaginta quinque millia, quadringenta ſexaginta duo. Similiter numerus *B* diviſus, ut ſuperius dictum eſt, dicit centum viginti quatuor milliones, & duo millia.

B 124, 002, 000.

Demum numerus *C* exprimit milliones 100.

$$C\ 100,000,000.$$

II. Pro numeris prolixioribus exprimendis ita procedes. 1. Datus numerus eodem modo per virgulas diſtribuatur in membra, ut ſuperius factum eſt. 2. Super notam primam dextrorſum ponatur una cyphra o, intermiſſiſque quinque figuris, ſupra notam ſeptimo loco poſitam ponatur unitas 1. Item poſt quinque iterum notas ſcribatur 2, atque ita deinceps, relictis ſemper quinque notis, ſcribatur 3, 4, 5 &c. Quodlibet membrum continet ſex notas, (præter primum ad ſiniſtram, quod aliquando continere poteſt 2, 3, 4, aut 5 notas) Exprimendæ ſunt igitur ſimul ſex illæ notæ; prolataque integra periodo, toties repetenda eſt vox hæc *millio*, quot ſunt unitates, quæ continentur ſupra primam notam talis periodi. Virgulæ autem appoſitæ millia ſignificant, ut exemplis ſequentibus *D*, & *E* facile intelligitur.

$$D\ 5\overset{2}{2},329,18\overset{1}{9},602,80\overset{0}{0}$$

Quinquaginta duo milliones millionum, tercentum viginti novem millia millionum, centum octoginta novem milliones, ſexcenta duo millia, octingenta.

$$E\ 45,92\overset{3}{8},634,42\overset{2}{6},350,87\overset{1}{2},385,17\overset{0}{3}$$

Quadraginta quinque millia millionum millionum millionum, nongenti viginti octo milliones millionum millio-

Digitized by Google

millionum, ſexcenta triginta quatuor millia millionum millionum; quadringenti viginti ſex milliones millionum, tercenti quinquaginta millia millionum, octingenti ſeptuaginta duo milliones, trecenta octoginta quinque ac centum ſeptuaginta tres.

SCHOL. I. *Si cui moleſtum ſit iterare toties vocem illam* millionum, *utatur hoc compendio: Ubi pronuncianda eſt vox millionum bis, dicat* bimillionum: *ubi ter, dicat* trimillionum: *ubi quater*, quadrimillionum *&c. adeoque ſuperius exemplum efferri poteſt ſic: quadraginta quinque millia trimillionum, nongenti viginti unum milliones bimillionum &c.*

SCHOL. II. *Præter valorem ſimplicem, quem ſingulæ notæ Arithmeticæ habent proprium, alium inſuper habent ratione loci, quem occupant: qui valor procedit in proportione ſubdecupla. Itaque nota primo loco, a dextris incipiendo, poſita ſignificat unitates, ſecundo loco poſita ſignificat tot decades, quot unitates habet; tertio loco tot centenas, quarto loco millia, quinto loco dena millia, ſexto loco centena millia &c. Id tyrones bene intelligant neceſſe eſt. Ecce exemplum.*

1 3 4 6 5 9 2.	duo.
9 0.	nonaginta.
5 0 0.	quingenta.
6 0 0 0.	ſex millia.
4 0 0 0 0.	quadraginta millia.
3 0 0 0 0 0.	trecenta millia.
1 0 0 0 0 0 0.	decies centena millia, ſeu millio.
1 3 4 6 5 9 2.	

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO II.

De Additione Integrorum.

I. ADditio eſt plurimorum numerorum in unam ſummam collectio. Numeri addendi vocantur *dati*; numerus, qui ex additione conflatur, dicitur *ſumma*, ſeu *aggregatum*. Additio procedit a dextra in ſiniſtram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem ſibi reſpondeant.

2. Ducta linea, numeros ſub eadem columna poſitos in unum collige; & ſi novem non excedant, ſubſcribe quotquot ſunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, ſubſcribe id, quod remanet ſupra decades, & adde ſequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

Sit exemplum, quæritur quot anni elapſi ſint ab orbe condito uſque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo tom. 2. lib. 13. de Doctrina Temporum numerantur,

	D	C	B	A
Ab Adamo ad finem diluvii anni,	1	6	5	6.
A fine diluvii ad Chriſtum,	2	3	2	7.
A Chriſto ad annum 1742.	1	7	4	2.
Summa	5	7	2	5.

Nam

Nam primo unitates 2, 7, 6 in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanent 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reſervo 1 pro ſequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5 in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, ſunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ *C* cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro ſequenti columna *D*.

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ ſcribo infra lineam, & habetur ſumma quæſita 5725.

Sit aliud exemplum. Addendæ ſunt in unam ſummam plures accepti, vel expenſi ſummæ *A*, *B*, *C*.

A	*B*	*C*
104	7245	235
741	3280	7348
892	834	9532
1380	1273	780
Sum. 3117	Sum. 12632	Sum. 17895

Peracta operatione, habetur ſumma *E* 3117; ubi patet, cyphras o in additione nihil addere, nam o, 2, 1, 4, faciunt 7.

II. Præter uſitatum additionis explicatæ modum, eſt alter, in quo operatio procedit a ſiniſtra verſus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur, ſed tota ſumma ſtatim infra lineam deſcribitur. Addendi ſint numeri *A*, *B*, *C*.

Digitized by Google

	F	G	H	I
A	1	9	6	6
B	7	3	4	5
C	9	2	8	9
D	17	4	8	0
E	1	1	2	
X	18	6	0	0

1. Incipiens a ſiniſtra, quæ hic millia ſignificat; dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 faciunt 17, quem totum ſcribo ſub ipſa columna millium *F*.

2. Colligo centena ſecundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate ſub linea, ſed 1 ſub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notantur decades 18 ſub columna *H*, & unitates 20 ſub columna *I*.

3. Ducta linea, altera fit additio ordinum *D* & *E*, & habetur ſumma quæſita *X*.

Demonſtr. Additionis ratio manifeſta eſt ex *Axiom.* 9. *lib.* 1. *Eucl.* nempe totum æquale eſſe omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Tot enim ſunt unitates, decades, centena, ac millia in ſumma reperta *X*, quot unitates, decades, centena, ac millia exiſtunt in ſummis ſingulis datis *A*, *B*, *C*. Nam ſi colligantur unitates ſub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc eſt decades 2, proinde ponitur 0, & reſervantur 2 illæ decades ad propriam ſedem decadum *H*. Similiter decades collectæ ſub columna *H* ſunt 18, quæ additis duabus prio-

prioribus, faciunt 20, hoc eſt centena 2, adeoque ponitur 0, & reſervantur 2 ad ſequentem ſeriem. Sub columna tertia *G* ſunt 14 centena, quibus ſi addantur 2 præcedentia, ſunt 16. Ponitur itaque 6, & reſervatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ *F* ſunt 17, quæ cum præcedenti 1 ſunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in ſumma *X* contineri, quot omnino continentur in numeris datis *A*, *B*, *C*. Quod totum patet ad oculum, ſcilicet

	FGHI	
	A 1966	
	B 7345	
	C 9289	
Unitates	20	20
Decades	18.	180
Centena	14..	1400
Millena	17...	17000
	X 18600	*X* 18600

PROPOSITIO III.

Additionem examinare.

Multiplici ratione fieri poteſt examen.

1. Eandem additionem repete, ſed ordine mutato, ut ſi prius ab imo ſurſum proceſſeris, deinde a ſummo deorſum deſcendas: nam ſi utraque ſumma inventa eadem fuerit, probabile eſt, nullum errorem irrepſiſſe.

2. A numeris addendis abiicitur 9 quoties poteſt, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & reſiduum notatur in angulo crucis. Abjectiſque deinde 9 ex ſumma *A*, ponitur reſiduum in altero angulo; quæ reſidua ſi fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet ſequenti exemplo:

		4	8	2	4	
		5	7	2	1	
		3	4	0	2	
A	1	3	9	4	7	

	9	
6		
		6

Hoc examen male audit ut fallax, nam ſi pro ſumma *A* alia longe major ponatur 19347, iiſdem numeris ordine mutato conſtans, aut ſi eidem ſummæ *A* addas quotcunque volueris cyphras 0, ſemper remanet, abjectis novenariis, idem reſiduum 6. Ceterum ob ſummam ejus facilitatem non eſt rejiciendum.

3. Fit abjiciendo omnes numeros ſeptenarios e qualibet ſumma particulari *A*, *B*, *C*, & ponendo ſeorſim reſiduum ut in *E*. Abjectiſque deinde ex utraque ſumma *M*, & *N* ſeptenariis, ſi reſidua in angulo crucis poſita æqualia ſint, res bene proceſſit.

Sed nota diſcrimen inter hoc, & ſuperius examen. Numerus novenarius abijcitur per additionem numeri ad numerum, ex. gr. ut abjiciam 9 ex 134, ſufficit addere ſimul 4 cum 3, & 1, & habetur ſtatim novenarii reſiduum 8. At ſi abijcere velis 7 ex eodem 134, procedendum eſt per decades, abjiciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & reſiduum eſt 1.

A		3	4	5	6	*E*	5
B		7	2	0	1		5
C		3	4	5	8		0
M	1	4	1	1	5	*N*	10

	7
3	
	3

Ratio hujus, & præcedentis examinis deſumitur ex *Axiom.* 3. *lib.* 1. *Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, reſidua ſunt æqualia.

PROPOSITIO IV.

De Subtractione Integrorum.

SUbtractio eſt inventio exceſſus, quo numerus major ſuperat minorem: En praxis.

1. Collocetur numerus minor ſub majori, a quo debet ſubtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis reſpondeant, ut de additione dictum eſt *Prop.* 2.

2. Ducta linea, & dextrorſum incipiendo auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, ſcribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior ſubduci non poteſt a ſuperiori, quia illo major eſt, intelligatur addita numero ipſi ſuperiori decas, factaque ſubtractione, ponatur reſiduum infra lineam: ſed deinde numerus ſuperior, qui ſequitur, unitate minuitur, vel (idem enim eſt) ſubſequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum ſi numerus inferior ſit ſuperiori numero

æqualis, ponitur infra lineam o; vel linea —, ſi id contingat in fine operationis.

Sit exemplum. Debet quis alteri aureorum ſummam *A*, non habet niſi aureorum ſummam *B* ſolvendam, quærit quantum de ære alieno ſuperſit.

A	1 9 2 5
B	1 3 8 2
C	– 5 4 3

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ ſcribe infra lineam. Deinde 8 ſubduci non poteſt ex 2, intellige decadem additam ipſi 2, fiet 12, ex quo aufer 8 remanent 4, ſcribenda infra lineam. At ſubſequens numerus ſuperior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde ſubductis 4 ex 9, reſiduum eſt 5; quod ſcribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1 nihil remanet, ſcribe lineam. Debebit igitur adhuc aureos 543, cum talis ſit exceſſus numeri majoris *A* ſupra minorem *B*.

Similiter ſubduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur exceſſus, ſeu reſiduum *X*.

M	6 2 0 0 1 0 0 2 7
N	· 3 1 9 5 7 6 8 4
X	5 8 8 0 5 2 3 4 3

Aufer 4 ex 7, reſiduum eſt 3. Item 8 ex 12, reſiduum eſt 4. Pariter 7 ex 10, reſiduum eſt 3. Similiter 8 ex 10, reſiduum eſt 2, tum 6 ex 11, reſiduum eſt 5, & 10 ex 10, reſiduum eſt o &c. Exa-

Examen ſubtractionis generatim fit addendo reſiduum *X* numero minori ſubtracto *N*. Nam ſi erratum non ſit, reſtituitur major numerus *M*, ut patet.

Examen fieri quoque poteſt per abjectionem novenarii. Nam abjecto novenario ex *A*, quantum abijci poteſt, reſiduum eſt 8. Deinde abjecto novenario ex numeris *B* & *C*, æqualibus ipſi *A*, reſiduum pariter eſt 8.

A	6	4	3	4			9
B		5	2	1		8	
C	5	9	1	3			8

Demonſtr. Subtractionis per ſe patet. Nam ex *Defin.* Subtractio eſt inventio exceſſus, quo numerus major ſuperat minorem, proinde exceſſus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent eſſe in *B*, & *C* ſimul, quot ſunt in *A*. Sed ſubducendo 1 ex 4, ponitur reſiduum 3. Sunt ergo tot unitates in *B*, & *C* ſimul, quot ſunt in *A*, nempe 4. Similiter ſubducendo decades 2 ex decadibus 3, ponitur 1 in reſiduo. Igitur decades *B* & *C* æquales ſunt decadibus in *A* contentis nempe 3, & ſic deinceps. Eſt ergo æqualitas inter *A*, & *B* una cum *C*. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

De Multiplicatione Integrorum.

M*Ultiplicatio* eſt ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum eſt inventio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus *A* 12 multiplicatus per *B* 3 producit numerum *C* 36, qui ter continet *A*, ſicuti *B* ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem eſſe compendioſam additionem; idem enim eſt multiplicare *A* per *B*, ac toties addere ipſum *A*, quot ſunt in *B* unitates.

Numeri *A* & *B* dicuntur *multiplicatores*, ſeu *factores*, numerus C *productum*, ſeu *factum*. Vulgo tamen qui minor eſt, & inferius ſcribitur, dicitur multiplicator, ſeu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si multiplicator unica figura conſtet (ut in primo ſequenti exemplo) illa ducatur ſigillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facto a dextra verſus ſiniſtram; & quot productum continet decades, tot reſerventur unitates ſequenti producto adjiciendæ, & ſcribatur infra lineam id, quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus conſtet figuris, tunc ſingulæ ſeorſim ducantur in ſingulas numeri multiplicandi figuras, ſed producta ita infra lineam ſcribantur, ut productum ſecundæ figuræ ponatur directe ſub ipſa ſecun-

cunda figura, productum tertiæ figuræ ſub tertia, & ſic deinceps, cum hæc producta importent decades, centena &c.

3. Ducta linea, ſingula producta particularia in unam ſummam colligantur, ut habeatur integrum productum quæſitum.

Sit exemplum 1. Vendendi ſunt agni *A* juliis 5 in ſingula capita, quæritur pretium *C*.

A	1 2 7 6.	*multiplicandus*.
	5.	*multiplicans*.
C	6 3 8 0.	*productum*.

Primo 6 quinquies ſumptus facit 30, pono 0, & ſequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Itaque 7 quinquies ſumptus facit 35, addo 3 fiunt 38, ſcribo infra lineam 8, & reſervo 3. Tum 2 quinquies ſumptus facit 10, addo 3 fiunt 13, ſcribo infra lineam 3, & ſervo 1. Demum 1 quinquies ſumptus facit 5, addo 1 præcedentem, & ſcribo 6.

Exemplum 2. Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere ſupponitur.

Dies	3 6 5
Horæ	2 4
	1 4 6 0
	7 3 0
Horæ	8 7 6 0

Exem-

Exemplum 3. Aerarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quæritur aureorum ſumma.

Opp.	824
Aur.	102
	1648
	8240
Aur.	84048

CoROLL. Hinc patet, quod ſi in multiplicatore occurrit cyphra 0, ponitur in producto cyphra (vel plures, ſi ſint) deinde ſtatim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum, quod ex præcedenti exemplo manifeſtum eſt.

SCHOL. I. *Cyphræ initiales ante operationem reſecantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot ſunt. Pariter ſi multiplicandus ſit numerus per* 10, *vel* 100, *vel* 1000 *&c. ſatis eſt addere multiplicando ad dexteram tot cyphras, quot continentur in multiplicatore, ſine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrumque patet exemplis* A & B.

A	136 | 0	*B* 15724
	2 | 00	1,000
	272,000	15724,000

SCHOL. II. *Multiplicatio fit etiam per factores numeri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem eſt multiplicare* 30 *per* 24, *ac* 30 *per* 4 & 6. *Item* 30 *per* 12 & 2, *vel per* 8 & 3, *qui omnes ſunt factores ipſius* 24.

SCHOL.

Digitized by Google

Schol. III. *Multiplicatio facile perficitur ab iis, qui probe callent producta, quæ fiunt ex numeris ſimplicibus in numeros ſimplices, unde componitur Tabula, quæ ab inventore Pythagora vocatur* Pythagorica. *Uſus illius eſt: ſi ſcire velis productum ex. gr. ex 3 in 8, quære 3 in columna* AB, *&* 8 *in fronte* AC, *invenies in communi concurſu productum* 24. *Sic de ceteris. Ratio eſt, quia columna prima incipit ab unitate, & deſcendendo creſcit uſque ad* 9. *Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. ſemper uſque ad* 9 *progredientes. Prima creſcit ſola unitate, ſecunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus* 8, *qui creſcit numero octonario, habet in tertia ſede numerum* 8 *ter ſumptum, ſcilicet* 24. *Idem numerus* 8 *habet in quinta ſede* 40, *hoc eſt* 8 *quinquies ſumptum, & ſic de ceteris.*

A			*Tabula*	*Pythagorica.*				C
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81
B								D

Multiplicationis examen fieri poteſt per abjectionem novenarii, aut ſeptenarii. Nam 1°. abijcitur 9, vel 7 ex numero multiplicando *A*, & reſiduum ponitur in angulo crucis *M*. 2°. Reijcitur 9, vel 7 ex multiplicante *B*, cujus reſiduum ponitur in angulo crucis *N*. 3°. Multiplicantur inter ſe *M* & *N*, & ex producto abijcitur 9, vel 7, reſiduumque ſcribitur in angulo *R*. 4°. Rejectis 9, vel 7 ex producto *C*, habetur reſiduum, quod ſi æquale ſit reſiduo priori *R*, res bene proceſſit.

	A 3506			9		
	B 132		*M*	5	3	*R*
D	7012		*N*	6	3	*T*
E	10518			7		
F	3506			6	1	
	C 462792			6	1	

Fit etiam *examen per diviſionem*. Nam ſi dividatur productum C per alterutrum factorem *A* vel *B*, prodibit in quotiente alter factorum *A*, vel *B*. Sed prius intelligendum, quid ſit diviſio; de qua in ſequenti *Propoſ.*

Demonſtr. Cum multiplicatio ſit compendioſa additio, ut dictum eſt, multiplicatio numeri *A* per notam ultimam numeri *B*, nempe per 2, eſt addere ipſum numerum *A* bis, unde producitur *D* 7012; in quo tot ſunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in *A* bis ſumpto. Similiter multiplicatio ejuſ-

ejuſdem numeri *A* per ſecundam notam numeri *B*, nempe per 3, qui ſignificat 30, eſt additio ipſius *A* ſumpti trigeſies, unde productum *E* tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in *A* trigeſies ſumpto. Demum productum *F* habetur ex multiplicatione numeri *A* per 1, hoc eſt per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in *F*, quot continentur in *A*, ſi centies ſumatur. Igitur tres numeri *D*, *E*, *F*, ſeu productum integrum *C*, tot continet unitates, decades &c. quot continentur in *A* centum trigeſies, & bis ſumpto. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

De Diviſione Integrorum.

Diviſio eſt inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet diviſorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per ſuas unitates, quoties diviſor continetur in diviſore. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, ſive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet diviſorem 3.

I. Sit diviſor numerus ſimplex 5, per quem dividendus eſt numerus datus 1580455. Ponatur diviſor ſiniſtrorſum ſeorſim poſt lineam, ut in *M*.

Diviſor M 5) 1 5 8 0 4 5 5. *dividendus.*
3 1 6 0 9 1. *quotus.*

C 2 Et

Et procedendo a ſiniſtra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, ſubſcribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continetur in ſubſequenti numero 8, continetur ſemel, & remanent 3. Scribe 1 ſub ipſo 8, tum adde decades tres ſequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus diviſis per 5, habetur quotus 6, quem pone ſub o. Poſtea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur o in quoto, & adde quatuor decades ſubſequenti numero 5, fiunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem ſubſcribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæſitus eſt 316091. Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a colonna*.

Fieri etiam poteſt hæc diviſio præſidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in *præc. Propoſ.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; diviſor vero in latere *A B*, & quotus in fronte *A C*. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & diviſore 5 in latere *A B*, invenitur in fronte *A C* quotus 8. Quod ſi dati numeri 40 diviſor ſit 8, invenietur in fronte quotus 5; & ſic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præciſe non reperitur, ut ſi dividendus ſit 50 per 6; ſumitur numerus proxime minor, cui directe reſpondet diviſor 6 in latere exiſtens, nempe 48, & in fronte occurit 8, qui erit quotus quæſitus.

Examen hujuſce diviſionis ſit multiplicando quotum per diviſorem. Si erratum non ſit, reſtituitur idem numerus, qui fuit diviſus, ut patet.

II. Quod ſi diviſor ſit numerus compoſitus, pluribus conſtans figuris, alia via procedendum. Dividendus ſit numerus datus *A* per numerum *B*.

B 45) *A* 186730
180

C 4149) —67
45

223
180

—430
405

—25

1. Accipe ex divieendo *A* tot figuras ſiniſtrorſum, quot ſunt in diviſore *B*. Vel accipe tot figuras ex numero dato *A*, quot per diviſorem *B* dividi poſſint; ut in hoc exemplo 186, eaſque ſecerne puncto. Erit 186 primum diviſionis membrum.

2. Vide quoties diviſor *B* contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoſcere haud facile eſt, vide quoties prima diviſoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum ſequenti figura 6 faciunt 26, in quo ſecunda diviſoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert, ſi pluries contineatur) totus ergo diviſor 45 continetur quater in toto diviſionis membro 186, proinde pone 4 in *C*.

3. Per quotum *C* multiplica totum diviſorem *B* 45, & productum 180 ſubſcribe ipſi 186, a quo illud ſubtrahe *per Propoſ.* IV., remanent 6.

4. Ad

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

4. Ad hoc reſiduum 6 junge dextrorſum ſubſequentem dividendi figuram 7, erit 67 ſecundum diviſionis membrum; eademque omnino operatio inſtituenda eſt: quam breviter in gratiam tyronum proſequar, ſcilicet:

Quære quoties diviſor 45 contineatur in 67, patet contineri ſemel, ſcribe ergo in *C* 1, per quem multiplica totum diviſorem *B*, & productum 45 ſubſcribe ipſi 67, factaque ſubtractione, habetur reſiduum 22.

Ad hoc reſiduum 22 adjunge ſequentem dividendi figuram 3, fiet tertium diviſionis membrum 223. Circa quod rurſus eadem operatio repetenda eſt.

Proinde vide quoties diviſor 45 continentur in 223; ſeu quoties prima figura 4 contineatur in 22, patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum ſequenti figura 3 faciunt 23. Sed ſecunda diviſoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitate (vel etiam pluribus, ſi opus ſit) & reponitur 4 in *C*, per quem multiplicato diviſore *B*, habetur productum 180, quod ſubſcribe ipſi 223, ab eoque ſubtrahe, remanent 43.

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum diviſionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda eſt. Vide igitur quoties 4 contineatur in 43, dic contineri tantum novies (nam nullus quotus ponitur in *C* major, quam 9) remanent 7, quæ cum cyphra faciunt 70, in quo pariter altera diviſoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando diviſorem 45 per 9 habetur productum 405, quod ſubtrahendum eſt ab ipſo 430, & reſiduum diviſionis eſt 25. Quotus ergo quæſitus *C* eſt 4149, & remanent 25.

Co-

Coroll. Ex præcedenti exemplo tria ſunt colligenda. 1. Si ſecunda, tertia, aut quarta diviſoris nota toties contineri non poſſit in ſecunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejuſdem diviſoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum una, vel pluribus unitatibus eſſe minuendum. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem novenario, etiamſi diviſor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum tot figuris conſtare, quot ſunt diviſionis membra.

Sit aliud exemplum. Dividere oporteat numerum datum *M* per numerum *N*.

N 179) *M* 73394475
716
R 410025) −179
179
000447
358
−895
895
000

1. Secerne puncto ex dividendo *M* tres figuras 733 quot ſunt in diviſore *N*, erit primum diviſionis membrum 733. Jam prima diviſoris nota continetur in prima dividendi nota ſepties, ſed cum ſecunda, & tertia divi-

diviſoris nota contineri non poſſint in ſecunda, & tertia nota dividendi pluries quam quater, minuitur 7. tribus unitatibus, & ponitur in *R* quotus 4.

2. Duc diviſorem *N* in 4, & productum 716 ſubſcribe ipſi 733, a quo ſubtrahendum eſt, remanet 17. Adde ex dividendo ſubſequentem figuram 9, faciunt 179, eritque ſecundum diviſionis membrum, in quo patet, diviſorem contineri ſemel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando diviſiorem, habetur productum 179, ſubducendum ex ipſo 179, adeoque remanet 0.

3. Diviſor contineri non poteſt in duabus ſubſequentibus dividendi figuris 44, pone ergo in quoto totidem cyphras, & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo, nempe 7, quæ faciunt 447, in quibus diviſor continetur bis. Pone igitur in quoto 2, & cetera proſequere, ut ſupra. Erit quotus *R* 410025 ſine ullo reſiduo.

Schol. I. *Quod remanet poſt ſingulas ſubtractiones, nunquam poteſt eſſe æquale, aut majus diviſore, alias fuit erratum. Aſſumptus enim fuit quotus juſto minor. Contra vero ſi productum ex quoto in diviſorem majus ſit reſiduo diviſionis, a quo fieri debet ſubtractio, ita ut ſubtractio fieri non poſſit, ſignum eſt, quotum aſſumptum eſſe juſto majorem, ac proinde eſſe minuendum. Utrumque caſum tyrones diligenter advertant.*

Schol. II. *Si abſoluta diviſione, aliquid remanet, ut in primo exemplo contigit, reſiduum illud ponitur ſupra lineam, & ſub eodem ponitur diviſor, atque hinc oriuntur fractiones, de quibus in capite* III.

Schol.

Schol. III. *Qui ſunt in hac dividendi praxi peritiores, producta ex ſingulis quotis in diviſorem non ſubſcribunt, ſed illa memoria retinentes, ſtatim ſubtrahunt ex membro diviſionis, & notant reſiduum. Sic dividendo* 305802 *per* 809, *productum ex* 3 *in* 9, *ſubtractum ex* 8, *relinquit* 1 *&c.*

	305802
809	6310
378	6472
	—00

Schol. IV. *Si diviſor habeat in fine unam, vel plures cyphras, ut* 120, 300, 4000 *&c. abſcinduntur ab illo cyphræ, totidemque figuræ a dividendo dextrorſum, deinde fit, ut moris eſt, diviſio cum reliquis figuris; ſed abſoluta operatione, figuræ ex dividendo abſciſſæ ponuntur ſupra lineam, infra quam ponitur diviſor integre ſumptus cum cyphris. Ut ſi dividendus ſit* 635 *per* 200. *Abſcinde duas cyphras ex* 200, *& duas figuras dextrorſum ex dividendo* 635; *diviſo deinde* 6 *per* 2, *habetur quotus* $3\frac{35}{200}$. *Quod ſi prima diviſoris nota fuerit* 1, *& reliquæ omnes cyphræ, ut* 10, 100, 1000 *&c. confecta erit diviſio, ſi ad dexteram dividendi abſcindas totidem figuras, quot ſunt in diviſore cyphræ, nam unitas non dividit. Proinde dividendo* 145690 *per* 10000, *quotus erit* $14\frac{5690}{10000}$; *dividendo per* 1000, *quotus erit* $145\frac{690}{1300}$ *&c.*

Schol. V. *Eſt alius non inelegans dividendi modus, quem Itali vulgo vocant*, partire per ripiego; *qui tunc ſolum adhiberi poteſt, cum diviſor poteſt reſolvi in ſuos factores. Sit dividendus numerus* 15460 *per* 45, *quia diviſor* 45 *reſolvi poteſt in ſuos factores* 5 *&* 9, *ex quibus componi-*

ponitur, divido primo per 5, quotus eſt 3092, divido deinde quotum 3092 per 9, oritur quotus quæſitus 343 $\frac{5}{9}$. Similiter dividendus ſit 13463 per 36, quia 36 componitur ex 4 & 9, divide per 4 numerum datum, quotus erit 3365 $\frac{3}{4}$, hunc divide per 9, quotus erit 373 $\frac{8}{9}$. Ut ex duabus illis fractionibus fiat unica fractio, duc reſiduum 8 in diviſorem 4, & producto adde reſiduum primum 3, fit 35. Duc deinde 4 in 9 fit 36, erit fractio $\frac{35}{36}$, unde 373 $\frac{35}{36}$ quotus quæſitus. Ratio hujus ſuo loco innoteſcet.

Examen diviſionis fit per multiplicationem. Nam multiplicando diviſorem per quotum, reſtituitur numerus dividendus, modo illi addatur, ſi quid ex diviſione remanſit.

Vel fit examen per abjectionem 9, vel 7. Nam rejectis primo 9, vel 7 tum ex diviſore, tum ex quoto, reſidua 8 & 4 notantur in angulo crucis ſiniſtro *A* & *B*, & ducuntur inter ſe, deinde producti reſiduum 5, abjectis 9 vel 7, ponitur in vertice ipſius crucis, cui quidem additur reſiduum diviſionis factæ, ablatiſque ex hac ſumma 9, vel 7, quod remanet, ut hic 0, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet eſſe id, quod reſtat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7, & notatur in *E*. Patet ſequenti exemplo *M*.

				5			0	
35	*M* 4563	*A*	8	0	*C*	0	6	
130	106							
	—13	*B*	4	0	*E*	4	6	

Demonſtr. Ex praxi a nobis tradita tot notis conſtare debet quotus, quot ſunt membra diviſionis, ut

ut *in Coroll. n.* 3. dictum eſt. Sed ſingulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties ſingula diviſionis membra diviſorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum diviſionis 186 continet quater diviſorem 45, ſicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita 45 ducitur in 4, & productum 180 (diviſoris 45 quadruplum) ſubtrahitur ex membro diviſionis 186. ergo patet, diviſionis membrum 186 quater continere diviſorem, ſicuti quotus 4 totidem unitates continet, alias ſubtrahi non poſſet. Remanet quidem, facta ſubtractione, numerus ſenarius, ſed hic ſequenti figuræ 7 jungitur pro ſecundo diviſionis membro, ut dictum eſt. Pari ratione idem oſtenditur de ſingulis ipſius quoti notis; unde ſequitur integrum quotum 4149 toties unitatem continere, quoties dividendum 186730 continet diviſorem 45, adeo ut quotus 4149 æque multiplex ſit unitatis, ac dividendum æque multiplex eſt diviſoris, & ſuperſint 25.

PROPOSITIO VII.

De diviſione integrorum per numeros diviſoris multiplices.

Methodus dividendi numerum per numeros diviſoris multiplices adhiberi potiſſimum poteſt, cum numerus dividendus eſt valde prolixus.

Sit exemplum. Ex doctrina Tychonis ſol motu diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum Italico-

rum 2140011712, quæritur quot milliaria conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24 in minuta, multiplicando illas per 60, erit diviſor, per quem dividi debet numerus milliariorum *A*, 1440, ſeu 144, (ablata ab ipſo cyphra, & ex dividendo *A* ultima nota dextrorſum 2) qui ponatur ad dextram dividendi, ut in *B*, & notetur punctum ſub tertia ipſius dividendi nota 4, cum diviſor *B* ſemel contineatur in 214, ut in *præc. propoſ.* dictum eſt. Tum ſcribantur ſub ipſo diviſore *B* ſinguli multiplices 288, 432, 576 &c. cum notis appoſitis 1, 2, 3, 4 &c. ut in exemplo.

Quia vero diviſor *B* continetur ſemel in 214, ſcribatur 1. in quoto *C*, ſubtractoque diviſore ipſo ex 214, remanent 70, additaque ſequenti figura dividendi, fiunt 700. Tunc obſervetur qualis ex multiplicibus ſub *B* exiſtentibus ſit proxime minor, quam 700, patet illum eſſe 576. Pone igitur in quoto notam illi appoſitam 4, & ſubtrahe ipſum 576 ex reſiduo 700, remanent 124, quibus addita figura ſequenti, habetur 1240. Iterum jam obſerva, qualis multiplex ſit proxime minor ipſo 1240; reperitur 1152, cui appoſita eſt nota 8, hanc pone in quoto *C*, & illum ſubtrahe ex reſiduo 1240, reſiduum eſt 88, & ſic deinceps, donec exhauriantur omnes dividendi figuræ. Sic enim nullo fere labore invenitur quotus C 1486119, cum reſiduo $\frac{352}{1440}$, quod quartam fere milliarii partem importat, ut in *Cap. ſequen.* explicabitur.

Sol igitur ex doctrina Tychonis unico horæ minuto conficit milliaria Italica 1486119.

1486119)

C	A
1486119)	2140011712
	144
	—700
	576
	1240
	1152
	—881
	864
	—171
	144
	—277
	144
	1331
	1296
	—35

B	
144	1
288	2
432	3
576	4
720	5
864	6
1008	7
1152	8
1296	9

CAPUT II.

REgulæ vulgaris Arithmeticæ hactenus traditæ applicari jam debent numeris *denominatis*, hoc eſt numeris diverſarum ſpecierum. Quod quidem difficile non erit, ſi dignoſcatur valor unius ſpeciei reſpectu alterius; nimirum quot partes minoris ſpeciei majorem ſpeciem conſtituant. Sic ut addantur, vel ſubtrahantur dies, horæ, ac minuta, neceſſe eſt ſcire minuta temporis 60 unam horam, horas autem 24 diem unum efficere. Idem de monetis, ponderibus, ac menſuris valet: quæ licet pro diverſitate Provinciarum, imo & Urbium variæ ſint, modus tamen eas calculandi eſt ubique proportionaliter idem; adeo ut ſi quis unius loci monetas, pondera ac menſuras addere, ſubtrahere, multiplicare, ac dividere noverit, ad alterius quoque regionis calculum eaſdem regulas applicare facile poterit.

PROPOSITIO I.

De Additione numerorum denominatorum.

I. E*Xemplum ſit* de vulgari moneta Romana, quam componunt ſcuta, aſſes, & quadrantes; hoc eſt quadrantes 5 aſſem 1, & aſſes 100 ſcutum 1, quod decem denariis argenteis, ſeu juliis conſtat.

Diſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus; ac primo quidem loco dextrorſus ſpecies minimæ, tum ordine majores uſque ad maximam; ut in hoc exemplo primo col-

collocentur quadrantes, ſecundo aſſes, tertio ſcuta; & ſi quæ ſpecies intermedia deſit, vacuus ejus locus repleatur cyphra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, fiunt 8, quibus continetur aſſis 1, & remanent 3, quæ ſcribe infra lineam. Adde deinde aſſem 1 ad ſequentem ſeriem aſſium, nempe ad 5, 0, 8, 5 fiunt 19 aſſes. Scribe 9 infra lineam, & pro decade una adde 1 ad aſſium decades 1, 2, 9, 3, ſunt decades 16, hoc eſt aſſes 160; reſerva itaque decades 10, (centena nempe 1.) pro ſequenti ſpecie, & ſcribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena ſcutorum eo modo quo factum eſt *in Propoſ. 2. Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei, prodibit ſumma ſcutorum 5099, aſſes 69, quadr. 3.

	Scut.	*Aſs.*	*Quad.*
	230.	35.	0.
	572.	98.	3.
	784.	20.	4.
	3512.	15.	1.
Summa	5099.	69.	3.

II. Libra in Urbe conſtat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ ſint ergo.

	Lib.	*Unc.*	*Den.*
	38.	10.	23.
	70.	11.	16.
	352.	05.	22.
Summa	462.	04.	13.

Ha-

Habentur libræ 462, unc. 4, den. 13. Nam denarii 22, 16, 23 additi faciunt 61, in quibus bis continetur 24, hoc eſt unciæ 2, quæ ſequenti columnæ addendæ ſunt, & remanent denarii 13, quos ſcribe infra lineam. Similiter unciæ 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, ſequenti columnæ addendas, & remanent unciæ 4, quæ pariter ſcribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *propoſ.* 2. *Cap.* 1, & habentur libræ 462, unc. 4, den. 13.

III. Addendi ſunt pedes Pariſienſes, pollices, & lineæ. Pes autem Pariſienſis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo.

	Pedes.	*Poll.*	*Lin.*
	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
Summa	1022.	06.	6.

Quod quidem manifeſtum eſt: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc eſt pollicem 1, qui reſervatur ſequenti columnæ addendus, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Deinde pollices 8, 11, 10 cum 1 præcedenti, fiunt 30, qui bis continent 12, hoc eſt pedes 2 ſequenti columnæ addendos, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam ſequentem, continuatur additio, ut in *propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei.

Exa-

Examen fieri poteſt ſic: completa ſuperioris exempli additione, duc lineam ſub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter ſolum ordinem *A*, qui relinquitur: habebis alterum aggregatum *C*, quod deficit ab aggregato primo *B*, defectu numerorum ordinis *A*. Si ergo aggregato *C* addas numeros *A*, habebis aggregatum *D* æquale aggregato primo *B*; alias fuit erratum. Hoc examen uſurpari quoque poteſt pro numeris homogeneis, ut patet.

	Ped.	*Poll.*	*Lin.*
A	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
B	1022.	06.	6.
C	893.	07.	9.
D	1022.	06.	6.

PROPOSITIO II.

De Subtractione numerorum denominatorum.

DIſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus, ut in *præc. propoſ.* dictum eſt, & numerus minor, ſeu ſubtrahendus, collocetur ſub majori, a quo debet ſubtrahi.

Quoties inferior numerus a ſuperiori ſubduci nequit,

Digitized by Google

quit, utpote illo major, toties numero ſuperiori addatur unum integrum ſequentis ſpeciei, ut fiat major ſubtrahendo. Deinde numerus ſpeciei, ex qua ſumptum fuit illud integrum, unitate minuatur. Quod exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* ſubtrahenda ſit pecunia expenſa *B*. Quia quadrantes 4 ſubtrahi nequeunt ex quadrantibus 3, ſumo 1 ex aſſibus 28, hoc eſt quadrantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex quibus ſubductis 4, remanent 4 infra lineam ſcribendi. Deinde minuendo unitate aſſes 28, vel augendo unitate (idem enim eſt) aſſes 36, ita ut prima figura 6 fiat 7, ſubducitur 7 a ſuperiori numero 8, & ſcribitur infra lineam reſiduum 1. Rurſus quia 3 ſubtrahi nequit ex 2, ſumo 1 ex ſcutis, ut ad 2 addantur 10, ac fiat 12, ex quo ſubtractis 3, reſiduum, quod ſcribitur infra lineam, eſt 9. Minuitur deinde 8, vel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum continuatur ſubtractio, ut in *propoſ.* 4. *Cap.* 1, & habetur reſiduum *C* ſcut. 140, aſs. 91, quadr. 4.

	Scut.	*Aſs.*	*Quadr.*
A	198.	28.	3.
B	57.	36.	4.
C	140.	91.	4.

II. Subtrahendus ſit numerus *N* ex numero *M*, ſcilicet.

Dies.

	Dies. Horæ. Min.
M	21. 14. 53.
N	10. 13. 57.
Q	11. 00. 56.
	21. 14. 53.

Cum minuta 57 ſubtrahi nequeant ex minutis 53, deſumitur unum integrum ex ſequenti ſpecie, nempe hora 1, ſeu minuta 60, quæ additæ minutis 53, faciunt min. 113, ex quibus ſubtractis 57, ſcribitur infra lineam reſiduum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta ſubtractione, nullum eſt reſiduum, & ſcribitur 0. Demum ſubductis 10 ex 21 reſiduum eſt 11. Eſt ergo numerus quæſitus *Q* dies 11 min. 56.

Examen fit addendo reſiduum *Q* numero minori *N*, nam facta additione, ut in *propoſ. præc.* dictum eſt, reſtituitur major numerus *M*, ſi erratum non fuerit.

PROPOSITIO III.

De multiplicatione numerorum denominatorum.

PRimo reducantur omnes ſpecies ad minimam, ut ſi multiplicandæ ſint libræ, ſolidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde ſpecies reductæ multiplicentur, ut moris eſt, per *propoſ. 5 Cap. 1.* Productum vero reducitur ad majorem ſpeciem per diviſionem.

I. *Sic exemplum*, Plancus expendit ſingulis diebus libras 5, ſolidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, ſeu diebus 365 expendet. Cum denarii 12 ſolidum unum, ſolidi vero 20 libram conſtituant, duc libras 5 in 20, & producto adde 15, habebis ſolidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1388: qui multiplicandi ſunt per dies 365, ſitque per *propoſ. 5. Cap.* 1 productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis ſolidos 42218, & denarios 4; Utque ſolidi ad libras reducantur, divide illos per 20, erunt libræ 2110, & ſolidi 18. Itaque Plancus uno anno expendet lib. 2110, ſol 18, den. 4. En totius reductionis typus.

	20
Lib.	5
	100
adde	15
Sol.	115
	12
	230
	115
	1380
adde	8
Den.	1388

II. *Sit exemplum.* Cum ſol motu proprio conficiat ſingulis diebus minuta 59, & ſecunda 8, quæritur quantum progrediatur diebus 30. Reducantur minuta 59 ad ſe-

Digitized by Google

ſecunda, multiplicando illa per 60, & addendo 8 ad eorum productum fient, ſecunda 3548, quæ multiplicari debent per dies 30. Erit per *propoſ. 5. Cap.* 1 productum 106440 ſecundorum. Hæc divide per 60, quotus dat minuta 1774, quæ quidem ſi iterum dividas per 60, habebis gradus 29, & min. 34, quos ſol motu proprio percurrit in Ecliptica diebus 30.

Examen multiplicationis ſit per diviſionem, de qua *in ſequenti propoſ.*

PROPOSITIO IV.

De diviſione numerorum denominatorum.

TAm diviſoris, quam dividendi ſpecies reducantur ad minimam, ut factum eſt in *præc. Propoſ.* Tum fiat diviſio *per Propoſ. 6. Cap.* 1.

I. Emit quis ſerici ulnas 60, pal. 6, unc. 10, expenditque ſcuta Romana 292, aſſes 10, quæritur quanti ſteterit ulna. Duc ulnas 60 in 8, ut fiant palmi; & adde producto 6, erunt palmi 486. Hos duc in 12, ut fiant unciæ, additiſque unciis 10, erunt unciæ 5842. Reducantur pariter ſcuta ad aſſes, & addantur aſſes 10, fient aſses 29210. Itaque dividantur per *prop. 6. Cap.* 1 aſses 29210 per 5842, quotus eſt 5; hoc eſt uncia quælibet valet aſſibus 5, proinde unciæ 12, ſeu palmus, valet aſſibus 60, adeoque palmi 8, ſive ulna, valet aſſibus 480, hoc eſt ſcut. 4, aſſibus 80.

II. Fingamus lunam diſtare ab aliqua fixa gr. 45, min. 30, ſec. 25, quæritur quanto tempore ſtellam illam

luna

luna aſſequetur. Ex Tab. Alfonſinis luna motu ſuo diurno conficit gr. 13. min. 10, ſec. 35. Proinde dividendi ſunt gradus 45, min. 30, ſec. 25 per gradus 13, min. 10, ſec. 35, ut habeatur appulſus lunæ ad fixam.

Primo duc gr. 45 in 60, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rurſus in 60, & adde producto 25, habebis ſec. 163825, numerus ſcilicet dividendus. Eodem pacto invenietur diviſor, nempe min. ſec. 47435. Tum facta diviſione per *propoſ.6. Cap.* 1. habetur quotus 3, hoc eſt dies 3, & remanent min ſec. 21520, quæ ſi multiplicaveris per 60, fient min. tertia 1291200. Hæc autem diviſa per eundem diviſorem dant in quoto min. prima 27, & remanent min. tertia 10455, quæ ſi multiplicentur per 60, fiunt min. quarta 627300; hæc autem per eundem diviſorem diviſa dant in quoto min. ſecunda 13. Luna igitur ad ſtellam perveniet diebus 3, min. 27, ſec. 13.

Examen diviſionis fit per multiplicationem. Nam ſi in exemplo primo multiplicaveris per *propoſ. præc.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per ſcut. 4 aſſ. 80, hoc eſt uncias 5842 per aſſes 480, fiet productum 2804160, quod diviſum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto ſcut. 292. 10. Similiter in ſecundo exemplo ducto diviſore 47435 in quotum 3, additoque ad productum reſiduo 21520, reſtituitur numerus, qui fuit diviſus 163825.

CA-

CAPUT III.

De Calculo Fractorum

DEFINITIONES.

I. NUmerus *fractus*, qui & *fractio*, vel *minutia* dicitur, eſt pars, ſeu partes alicujus numeri integri in plures æquales partes diviſi. Ut ſi totum aliquid dividatur in tres partes æquales, & ex illis quiſpiam duas partes obtineat, dicetur habere duas tertias partes, ſcilicet $\frac{2}{3}$, quæ fractionem efficiunt.

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui ſcribitur ſupra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quæ de illo toto diviſo habentur; alter qui ſcribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, ſeu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit diviſum, nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{11}{20}$ &c.

Quæ fractiones ſic pronunciantur, *una dimidia*, *una tertia*, *duæ ſeptimæ*, *quatuor nonæ*, *undecim vigeſimæ &c.* intelligitur pars, ſeu partes.

Si numerator æqualis ſit denominatori, minutia æqualis eſt uni integro. Sic $\frac{3}{3}$ æquivalent uni integro in tres partes æquales diviſo. Adſunt enim omnes partes illius integri, adeoque $\frac{3}{3}$ ſunt 1. Item $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$ &c. ſignificant 1. Hinc patet, unitatem eſse illud totum diviſum in partes tertias, quintas, ſextas &c.

Si

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic $\frac{4}{3}$ plus ſunt quam unum integrum in tres partes diviſum, ſed important 1, & inſuper $\frac{1}{4}$. Similiter $\frac{16}{5}$ ſignificant tres integros, & adhuc $\frac{1}{5}$.

II. *Minutia minutiæ* eſt pars alterius minutiæ, ut ſi fractionis $\frac{3}{4}$ ſumatur dimidia pars, nempe $\frac{1}{2}$, erit hæc minutia minutiæ, quæ a majori diſtingui ſolet per interpoſitam lineam. Sic $\frac{1}{2} | \frac{3}{4}$ ſignificat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in poſterum ſignis, quæ ſequuntur.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ ſignificat duas quantitates a & b eſse æquales.

$+$ *Plus. Signum additionis*. Ut $a + b$ ſignificat ſummam duarum quantitatum a, & b. Sic $3 + 5$ ſignificat ſummam 8, & exprimitur $3 + 5 = 8$.

$-$ *Minus. Signum ſubtractionis*. Ut $a - b$ ſignificat a minus b, hoc eſt a quantitate a ſubtractam eſse quantitatem b. Sic $5 - 3 = 2$.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ ſignificat a multiplicatum in b, vel per b. Ut $3 \times 5 = 15$.

$::$ *Signum proportionum æqualium*. Sic $a . b :: c . d$ denotat eandem eſse proportionem inter a & b, quæ eſt inter c & d. Ut $2 . 4 :: 3 . 6$. Item $1 . 3 :: 9 . 27$ &c.

∺ *Signum proportionis continuæ*. Sic ∺ a, b, c, denotat a eſse ad b, ſicuti b ad c. Ut $2, 4, 8$.

AXIO-

AXIOMATA.

I. UNitas ſe habet ad fractionem, ut denominator ad numeratorem. Sic 1. $\frac{2}{3}$ :: 3. 2. Unitas enim ex dictis eſt totum diviſum, quod ſe habet ad partem, (quæ eſt fractio) ut fractionis denominator (qui eſt totum, quod fuit diviſum) ad ſui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad ſuos numeratores eandem rationem, ſunt inter ſe æquales, & valent omnino idem. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$ &c. ſunt fractiones æquales, idemque ſignificant. Quod ex primo *Axiom.*, tum etiam per ſe patet. Nam ſingulæ hæ fractiones unius integri medietatem important. Hinc fractorum valor non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, ſed æſtimari debet ex proportione majori, vel minori, quam numerator habet ad ſuum denominatorem; proinde major eſt $\frac{1}{2}$, quam $\frac{1}{10}$, vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam denominator per eundem numerum multiplicantur, aut dividuntur, valorem non mutat. Sic multiplicando $\frac{2}{3}$ per 5 oritur $\frac{10}{15}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.* Pariter dividendo $\frac{10}{15}$ per 5 fit $\frac{2}{3}$ ejuſdem valoris cum $\frac{10}{15}$. Item diviſis $\frac{3}{9}$ per 3, fit $\frac{1}{3}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

SCHOL. *Multum intereſt, ut tyrones hactenus dicta bene intelligant, priuſquam ad fractorum regulas addiſcendas procedant, alioquin difficilia illis, & valde obſcura erunt, quæ ſequuntur.*

PROPOSITIO I.

Datis duobus numeris, maximam eorum communem menſuram invenire.

MEnſura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & ſine reſiduo dividit; ſeu numerus, qui aliquoties ſumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur menſura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum ſepties ſumptus adæquat. Dicitur autem menſura maxima numerus, per quem ſolum duo numeri reducuntur ad numeros primos, ſeu minimos.

I. Dati ſint duo numeri *A* & *B*, quorum menſura communis maxima quæritur. Dividatur major *A* per minorem *B*, & neglecto quoto, notatur reſiduum *C*; deinde *B* dividatur per reſiduum *C*, tum reſiduum *C* per reſiduum *D*, & ſic deinceps, nulla habita exponentium ratione, donec tandem diviſor occurrat *F*, qui præcedentem exacte dividat ſine ullo reſiduo; hic erit maxima communis menſura quæſita.

Exempl. 1.	*A*	234	*Exempl.* 2.	438
	B	144		102
	C	90		30
	D	54		12
	E	36		6
	F	18		0
		0		

II. Quod

II. Quod ſi poſt omnem diviſionem remanet 1, ſignum eſt, nullam reperiri poſſe communem menſuram inter numeros datos, eoſque eſſe inter ſe primos.

Dati ſint numeri *M* & *N*, divide majorem *M* per *N*, & neglecto quoto, nota reſiduum *R*, ac ſic deinceps proſequere; occurrit demum 1, adeoque numeri dati *M* & *N* ſunt inter ſe primi.

Exempl. 1.	*M*	134	*Exempl.* 2.	269
	N	49		147
	R	36		122
	S	13		25
		10		22
		3		3
		1		1

Demonſtr. per ſe manifeſta eſt. Nam per continuam illam numeri minoris a majori ſubtractionem (diviſio enim eſt compendioſa ſubtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel aliquantam numerorum datorum. In primo caſu pars illa aliquota erit maxima communis menſura duorum numerorum; in ſecundo caſu evidens eſt, nullum alium numerum, præter unitatem, metiri poſſe numeros datos, adeoque ſunt inter ſe primi (*per defin.* 8.)

Schol. *Nota quemlibet numerum ſe ipſum ſemel metiri, proinde dari poteſt menſura communis maxima inter duos numeros, quorum alter ſimplex ſit, ſeu primus, & alter compoſitus. Sic* 7 *eſt maxima communis menſura inter* 7 *&* 21. *Nam utroque diviſo per* 7, *habetur* 1 *&* 3.

Item 5 & 75 diviſi per 5, faciunt 1 & 15, adeoque 5 eſt maxima communis menſura; & ſic de aliis.

PROPOSITIO II.

Fractiones ad minimos terminos reducere.

FRactio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia illi æqualis, nempe valoris ejuſdem, minimis terminis expreſſa reperitur.

I. Data ſit fractio $\frac{160}{296}$ ad minimos terminos reducenda, quæratur maxima communis menſura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propoſ. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejuſdem valoris, & minimis terminis expreſſa $\frac{20}{37}$ per *Axiom.* 3.

II. Sit minutia data $\frac{60}{96}$ reducenda ad minimos terminos. Inveniatur maxima communis menſura inter 96, & 60, per *Propoſ. præc.* erit 12, per quem diviſo utroque datæ fractionis termino, habetur nova fractio $\frac{5}{8}$ minimis terminis expreſſa. Hæc praxis vulgo dicitur *ſchizare i rotti*.

Demonſtratio patet ex 3. *Axiom.*

PROPOSITIO III.

Fractiones ad idem nomen reducere.

FRactiones reducere ad idem nomen, eſt efficere, ut fractiones diverſorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, ſed idem valeant, quod prius.

I. Sint

I. Sint duæ fractiones *A* & *B* ad commune nomen reducendæ. Duc inter ſe ad invicem denominatores 5×4, & 4×5, erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, ſeu decuſſatim, numeratorem unius minutiæ per denominatorem alterius, hoc eſt 2×4, & 3×5, erunt novi numeratores 8 & 15, qui directe collocandi ſunt ſub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in ſequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ novæ fractiones *C* & *D* ejuſdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejuſdem per 3. *Axiom.*

Nam termini fractionis *A* multiplicantur per eundem numerum, hoc eſt per 4 denominatorem fractionis *B*; unde oritur fractio *C* priori æqualis per *Axioma cit.* Similiter termini fractionis *B* multiplicantur per 5 denominatorem fractionis *A*, & oritur fractio *D* priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones *C* & *D* idem valent ac duæ priores.

$$A \ \tfrac{2}{5} \times \tfrac{3}{4} \ B \qquad \tfrac{1}{6} \times \tfrac{10}{15}$$

$$C \ \tfrac{8}{20} \quad \tfrac{15}{20} \ D \qquad \tfrac{15}{90} \quad \tfrac{60}{90}$$

II. Quod ſi reducendæ ſint ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut *A*, *B*, *C* &c. duc omnes denominatores inter ſe $3 \times 4 \times 5$ fiet *F* communis denominator 60, qui diviſibilis eſt per ſingulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem 60 per 3 denominatorem fractionis *A*, quotus eſt 20, tertia ſcilicet denominatoris

toris communis pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipſius 60, adeoque $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ per *Axioma* 2.

Similiter diviſo 60 communi denominatore per denominatorem 4 fractionis *B*, habetur 15 quarta pars ipſius 60. Duc 15 in 3, habebis 45 tres quartas partes ejuſdem 60, adeoqoe $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ per *Ax.* 2. Eadem ratione invenitur $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Proinde fractiones datæ *A*, *B*, *C*, æquales ſunt fractionibus *M*, *N*, *R*; quod per ſe manifeſtum eſt.

$$\begin{matrix} A & B & C \\ \frac{2}{3} \times & \frac{3}{4} \times & \frac{1}{5} = 60\ F \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} M & N & R \\ \frac{40}{60} & \frac{45}{60} & \frac{12}{60} \end{matrix}$$

Coroll. Ex hac Propoſ. innoteſcit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum ſit major. Nam ſi reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ ſit major. Sic in ſuperiori exemplo fractio *B* eſt ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis *N*.

Schol. *Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc duæ illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit diviſor. Sint reducendæ ad idem nomen fractiones* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{7}{15}$, *quia* 3 *dividit exacte* 15, *multiplica per quotum* 5 *terminos fractionis* $\frac{2}{3}$, *oritur* $\frac{10}{15}$ *ejuſdem nominis cum alia fractione. Quod eſt valde commodum in Calculis Algebraicis, ut in noſtris* Inſtit. Analyt. *annotavimus*. PRO-

PROPOSITIO IV.

Fractionem ad aliam dati nominis, & ejuſdem valoris revocare.

I. DAta ſit fractio $\frac{2}{3}$, quæ revocari debeat in aliam, cujus denominator datus ſit 60. Duc numeratorem 2×60, & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutiæ quæſitæ $\frac{40}{60}$, quæ quidem eſt ejuſdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3 . 2 :: 60 . 40. ut patet.

II. Quod ſi datæ fractionis denominator non exacte dividit productum, ut ſi $\frac{2}{3}$ reduci debeant ad fractum, cujus denominator eſt 8, productum 16, quod oritur ex 2 × 8, non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 ſupra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex reſiduo, nempe $\frac{1}{3}$, quæ erit fractionis fractio; & facit hunc ſenſum, duæ tertiæ in octavas redactæ dant quinque octavas, & unam tertiam quinque octavarum, ſcilicet $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3}$. Quod autem $\frac{2}{3}$ idem valeant ac $\frac{5}{8} + \frac{1}{3}$, patet ex 2. *Axiom.* Nam 3 . 2 :: 8 . 5 + $\frac{1}{3}$. hoc eſt 3 . 2 :: 24 . 16.

SCHOL. *Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut ſi ſcire velis quid valeant* $\frac{3}{5}$ *unius ſcuti Romani in juliis, vel aſſibus. Quia* 10 *julii, aut aſſes* 100 *efficiunt ſcutum Romanum* 1, *duc numeratorem* 3 *in* 10, *aut in* 100, *& productum divide per denominatorem* 5, *erunt in primo caſu* $\frac{6}{10}$, *in ſecundo* $\frac{60}{100}$, *hoc eſt julii ſex, aut aſſes* 60. *Item dantur* $\frac{3}{7}$

unius

unius pedis, ſcire volo quot pollices hæc fractio importet. Quia pollices 12 *pedem* 1 *efficiunt, duco* 3 x 12, *& productum* 36 *divido per* 7, *quotus dat* 5, *unde habentur* $\frac{5}{12}$ *hoc eſt pollices* 5, *& remanet* $\frac{1}{7}$. *Quod ſi iterum ſupponas pollicem dividi in* 12 *lineas, facile erit explorare, quid importet una ſeptima pars unius pollicis. Hæc praxis vulgo dicitur* valutare i Rotti.

PROPOSITIO V.

Fractiones ad integra revocare.

I. Cum numerator denominatore ſuo major eſt, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic $\frac{12}{3}$ diviſæ per 3 dant integra 4. Item $\frac{60}{12}$ diviſæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod ſi denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex reſiduo minutia. Proinde $\frac{17}{3}$ diviſæ per 3 dant integra 5 $\frac{2}{3}$. Similiter $\frac{22}{7}$ diviſæ per 7 dant 3 $\frac{1}{7}$.

Schol. *Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac menſuras in alias ſpeciei altioris. Sic aſſes* 350 *ſi dividantur per* 100, *reducuntur ad ſcuta Romana* 3 $\frac{50}{100}$, *ſeu* 3 $\frac{1}{2}$. *Pariter minuta* 120 *diviſa per* 60, *dant horas* 2. *Patet diviſores iſtos* 100, *&* 60 *eſſe denominatores minutiarum, per quos earum numeratores dividuntur per hanc Propoſitionem.*

PRO-

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.

Sit datus integer v. gr. 3 reducendus in fractum, cujus denominator ſit 7. Multiplica integrum ipſum 3 per denominatorem datum 7, & producto ſubſcribe ipſum denominatorem 7, erit fractio quæſita $\frac{21}{7}$. Similiter unitas reducenda ſit in fractum, cujus denominator ſit 5, erit $\frac{5}{5} = 1$ ex dictis ad *definit.* 1. *Cap. hujus*.

Schol. I. *Si integro cuilibet ſupponatur unitas, fit fractio; vel quaſi fractio integro æquivalens, ut* $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{8}{1} = 8$ *&c. quod pro multiplicatione, & diviſione fractorum annotetur*.

Schol. II. *Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac menſuras in alias inferioris ſpeciei. Sint ſcuta Romana* 55 *reducenda ad aſſes, multiplica* 55 X 100, *habebis aſſes* 5500. *Item milliaria Romana* 50 *convertenda ſint in paſſus, quia paſſus* 1000 *milliare* 1 *efficiunt, duc* 50 X 1000, *fient paſſus* 50000. *Patet in his exemplis numeros illos* 100, *&* 1000 *eſſe denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri* 55, *&* 50, *ut fiant fractiones* $\frac{5500}{100}$, $\frac{50000}{1000}$ *juxta hanc* Propoſ.

PROPOSITIO VII.

Fractionem fractionis ad ſimplicem fractionem reducere.

DUÆ, vel plures fractiones fractionum ad unam ſimplicem fractionem reducuntur hoc pacto. Multiplica ſingulos numeratores inter ſe, & ſingulos pariter denominatores inter ſe, duo producta minutiam efficient æqualem omnibus illis minutiis minutiarum datis. Sit minutia minutiæ $\frac{1}{4}$) $\frac{2}{3}$) hoc eſt una quarta pars duarum tertiarum ad ſimplicem minutiam reducenda, duc inter ſe numeratores 1×2, & denominatores 4×3, erit nova quæſita minutia $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Similiter reducendæ ſint ad ſimplicem minutiæ minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$, multiplicatis inter ſe $3 \times 2 \times 3$, item $4 \times 3 \times 5$, habetur nova minutia omnibus illis æqualis $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ per *Prop.* 2. hujus.

Demonſtr. ſenſibili aliquo exemplo res manifeſta erit. Ponamus hanc ipſam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ deſumptam fuiſſe ex uno ſcuto Romano, quod decem juliis conſtat; dico hanc minutiam minutiarum continere $\frac{3}{10}$ unius ſcuti, nempe tres julios. Nam $\frac{3}{5}$ unius ſcuti continent ſex julios, cum julii duo ſint $\frac{1}{5}$ unius ſcuti. At $\frac{2}{3}$ ſex juliorum ſunt quatuor julii, ut patet, & $\frac{3}{4}$ quatuor juliorum ſunt tres julii. Ergo evidens eſt, minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ continere $\frac{3}{10}$, nempe tres julios.

Id facile illuſtrari poteſt dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam ſi quæratur dimi-

midium unius tertiæ partis ejuſdem lineæ, patet illam eſſe partem ſextam totius. Diviſis enim bifariam ſingulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea diviſa in ſex partes æquales; proinde $\frac{1}{2}$ unius tertiæ facit $\frac{1}{6}$. Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos audit *inſilzare i Rotti*.

PROPOSITIO VIII.

Fractiones addere.

I. SI fractiones addendæ ſint ejuſdem nominis, adde ſimul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem ſubſcribe. Sint addendæ $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ additis numeratoribus $1 + 2 + 5 + 6 = 14$, fit fractionum ſumma $\frac{14}{7} = 2$ per *Propoſ.* 5. hujus.

II. Si fractiones addendæ ſint diverſi nominis, reduc ad idem nomen per *Propoſ.* 3. & operare, ut dictum eſt.

III. Quod ſi addendi ſunt integri cum fractis, adde ſeorſim integros, & ſeorſim fractos; ut ſi ad $4\frac{2}{7}$ addendi ſint $3\frac{1}{7}$, fiet ſumma $7\frac{3}{7}$. Res per ſe patet.

PROPOSITIO IX.

Fractiones ſubtrahere.

I. SI minutiæ ſunt ejuſdem nominis, minor earum ex majori ſubducitur, & reſiduo ſubſcribitur communis denominator. Sic $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. Item $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$.

II. Si diverſi ſint nominis, reducantur ad idem nomen per *Propoſ.* 3., & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris ſubtrahenda ſit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejuſdem nominis cum data fractione per *Propoſ.* 6., & cetera fiant, ut ſupra. Subtrahere oporteat $\frac{2}{3}$ ex 4, reduc 4 ad tertias, erunt $\frac{12}{3}$. Deinde $\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ per *Propoſ.* 5. Similiter ſubtrahenda ſint $2\frac{1}{4}$ ex $5\frac{1}{2}$, hoc eſt $\frac{9}{4}$ ex $\frac{11}{2}$: reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propoſ.* 3. erunt $\frac{22}{4}$, & $\frac{9}{4}$, adeoque $\frac{22}{4} - \frac{9}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$, per *Propoſ.* 5.

Schol. *Ut minutiæ addi, vel ſubtrahi valeant, ſemper idem nomen habere debent, quod notetur.*

PROPOSITIO X.

Fractiones multiplicare.

I. SI multiplicanda eſt fractio per fractionem, duc inter ſe numeratores, itemque denominatores inter ſe, res erit confecta. Multiplicanda ſit fractio $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ ductis 2×2, & 3×5, habetur productum quæſitum $\frac{4}{15}$. Sic $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ per *Propoſ.* 8.

II. Quod ſi multiplicandus ſit integer per fractum, vel fractus per integrum, ſemper integro ſuppone unitatem, ut fiat quaſi fractio; deinde operare ut ſupra. Sit multiplicanda $\frac{2}{3} \times 7$, ſuppoſita integro unitate, erit $\frac{2}{3} \times \frac{7}{1}$, proinde productum $\frac{14}{3}$.

III. Si vero alter multiplicantium ſit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejuſdem fracti; ut ſi multiplicari opor-

oporteat $2\frac{1}{5}$ per 6, fiat $\frac{11}{5} \times \frac{6}{1}$; erit productum $\frac{66}{5}$. Similiter ſi uterque multiplicator ſit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejuſdem nominis cum minutia ſibi adhærente: ut ſint multiplicanda $3\frac{1}{7} \times 5\frac{1}{3}$, reducantur ad fractos, erunt $\frac{22}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{352}{21} = 16\frac{16}{21}$ per *Propoſ.* 5.

Demonſtr. Ex regula tradita multiplicare fractum *A* per fractum *B* eſt producere fractum *C*, qui toties contineatur in fracto *B*, quoties fractus *A* continetur in unitate. Nam ſicuti fractus *C* continetur bis in fracto *B*, ita fractus *A* bis continetur in unitate, ut patet; ergo ex definitione multiplicationis fractus *C* eſt productum fracti *A* multiplicati per fractum *B*.

$$A\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \cdot B \qquad \frac{3}{10}\ C$$

Coroll. Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis *C* ſit minus, quam factores *A* & *B*. Nam cum unitas ſit ad *A*, ut *B* ad *C* ex *defin.* multiplicationis *per Prop.* 5. *Cap.* 1.; & unitas major ſit quam *A*, etiam *B* major erit quam *C*, proinde *C* minor.

Schol. I. *Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per diviſionem, dividendo ſcilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutiæ (modo diviſibiles ſint ſine reſiduo) ſint enim multiplicanda* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$, *divide* 9 *per* 3, & 10 *per* 2, *fit* $\frac{3}{5}$ *productum quæſitum. Idem enim producitur, ac ſi more conſueto multiplicentur. Nam* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ per *Propoſ.* 2.

Schol. II. *Si integrum cum minutia ducendum ſit in integrum, quod exacte diviſibile ſit per denominatorem minutiæ, ut ſi ducendum ſit* $38\frac{2}{3} \times 18$, *practici primo*

primo reſolvunt integrum in fractum, fitque 116 , *deinde diviſo* 18 *per denominatorem* 3, *habetur quotus* 6 , *per quem multiplicant ipſum* 116 , *& habetur productum quæſitum* 696 . *Ratio per ſe patet* .

PROPOSITIO XI.

Fractiones dividere .

I. SI termini diviſoris exacte dividant terminos dividendi, fractus , qui inde oritur , erit quotus. Ut ſi dividenda ſit minutia $\frac{4}{9}$ per $\frac{2}{3}$, diviſis 4 per 2 , & 9 per 3 , quotus erit $\frac{2}{3}$. Similiter ſi denominator ſit communis , ſatis erit dividere numeratorem per numeratorem ; ſic dividendo $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$, quotus erit $\frac{3}{7}$.

II. Quod ſi termini diviſoris non exacte dividant terminos dividendi , inverte diviſorem , ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris , deinde duc tam numeratores inter ſe , quam denominatores inter ſe , productum erit quotus quæſitus . Dividenda ſit minutia $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, inverſo diviſore ; erit $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ quotus quæſitus . Sic $\frac{4}{7}$ diviſa per $\frac{3}{5}$, inverſo diviſore , erit $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$ quotus .

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, ſatis eſt multiplicare denominatorem fracti per ipſum integrum . Sit dividendus $\frac{1}{5}$ per 2 , duc 5 X 2 , quotus erit $\frac{1}{10}$. Item $\frac{1}{3}$ diviſus per 5 , dat quotum $\frac{1}{15}$. Nam ſemper integro ſupponitur unitas .

IV. Cum diviſor , aut dividendus , vel uterque eſt integer cum minutia , reducendus eſt integer ad minutiam

tiam ſibi adjunctam, ut fiat unica minutia, & operatio inſtituenda eſt, ut ſupra. Sint dividenda $24\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{3}$, fient $\frac{121}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{363}{10} = 36\frac{3}{10}$ *per Prop.* 5. Similiter ſint dividenda $15\frac{1}{3}$ per $12\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{46}{3} \times \frac{25}{2} = \frac{92}{75} = 1\frac{17}{75}$.

Demonſtr. Dividere fractum *A* per fractum *B* eſt invenire quotum *C*, ad quem ita ſit unitas, ſicuti diviſor *B* ad dividendum *A* ex diviſionis definitione *per Prop.* 6. *Cap.* 1. Sed unitas eſt ad fractum *C*, ut diviſor *B* ad dividendum *A*. Unitas enim eſt ad *C*, ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom.* 1. Fractus autem *B* eſt ad fractum *A*, ut 3 ad 4: nam redactis ad idem nomen *A* & *B* per *Prop.* 3. oriuntur fracti æquales *M* & *N*, qui ob communem denominatorem ſe habent ut 3 ad 4; ergo unitas eſt ad *C*, ut *B* ad *A*; proinde *C* eſt quotus quæſitus. Quod &c.

B	*A*	*C*
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

M	*N*	
$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$1 . \frac{4}{3} :: 3 . 4$

COROLL. Hinc patet ratio, cur in diviſione minutiarum quotus ſit major numero ipſo, qui dividitur; quod quidem accidit, cum diviſor minor eſt unitate. Nam cum diviſor ſit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando diviſor ad unitatem, ut dividendus ad quotum; adeoque ſi diviſor minor eſt unitate, etiam dividendus debet eſſe minor quoto.

SCHOL. I. *Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut* $634\frac{2}{3}$ *per* 5, *practici dividunt*

dunt integrum per integrum, nempe 634 per 5, nulla habita ratione fractionis, ut inveniant quotum 126. *Tum ſi quid remanet (ut hic* 4) *illud reducunt ad fractionem* per Prop. 6., *hoc eſt ad ad* $\frac{12}{3}$, *quam ad fractum* $\frac{2}{3}$ *addunt; ſitque ſumma* $\frac{14}{3}$ *per* Propoſ. 8., *quæ quidem ſumma diviſa per* 5 *dat quotum* $\frac{14}{15}$ *per hanc* Propoſ. n.3. *unde quotus quæſitus eſt* 126 $\frac{14}{15}$.

Schol. II. *Eſſet hic agendum de fractionibus decimalibus, earumque calculo, quæ quidem in rebus præſertim Geometricis magno ſunt uſui. Sed nos de illis in noſtris Inſtitutionibus Analyticis ſatis luculenter egimus, neque actum agere volumus.*

CAPUT IV.

De Extractione Radicum.

SI numerus quicunque ducatur in ſe ipſum, ut 3 X 3, producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicit ad quadratum Geometricum. Item ſi ducas 4 X 4, oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in ſe ductis planum illud, ſeu quadratum oritur, dicuntur *radix*, ſeu *latus* quadrati.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repræſentant corpus æqualiter longum, latum, & profundum, quod a Geometris denominatur

cubus,

cubus, & numeri illi 3, & 4 dicuntur *radix*, ſeu *latus* cuborum 27, & 64.

Quod ſi cubus ipſe per ſuam radicem multiplicetur, ut 27 X 3, oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum 81 X 3, oritur *quadrato-cubus*, & ſic deinceps.

Hæc producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, ſeu *poteſtates*; ita ut dicatur ex priori exemplo,

3. *Radix*, ſeu poteſtas prima.
9. *Quadratum*, ſeu poteſtas ſecunda.
27. *Cubus*, ſeu poteſtas tertia.
81. *Quadrato-quadratum*, ſeu poteſtas quarta.
243. *Quadrato-cubus*, ſeu poteſtas quinta.

Extractio igitur radicis quadratæ, vel cubicæ &c. (ſeu ſecundæ, tertiæ, vel quartæ poteſtatis &c.) eſt inventio illius numeri, qui ſemel, bis, ter, vel pluries in ſe ductus, illam poteſtatem genuit, adeoque ab ipſa poteſtate denominatur radix ſecunda, tertia, quarta &c. Hoc problema ingentem uſum habet in univerſa fere Matheſi, proinde expedit, ut tyrones in eo diligenter inſtruantur.

PROPOSITIO I.

Ex dato numero radicem quadratam, ſeu ſecundam extrahere.

I. SI numerus datus centenarium non excedit, & ſit quadratus, ejus radix habetur ex tabella inferius poſita; ut ſi quæratur radix quadrati 64, ejus ra-

 dix

dix invenitur 8. Quod ſi numerus non ſit quadratus, ut ex. gr. 50, ſumenda eſt ex eadem tabella radix proxime minor, hoc eſt 7, quæ in ſe ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

II. Sit numerus *A*, ex quo radix ſecunda extrahenda ſit. 1. Sub ultima figura ad dexteram notetur punctum, deinde ſub antepenultima, & ſic deinceps, ut totus numerus diſtribuatur in membra (ut hic tria) quæ continebunt binas figuras, excepto ultimo ad ſiniſtram, ſi numerus figurarum ſit impar, quod unam habebit. Quot erunt membra, tot figuris radix quæſita conſtabit.

2. Quære ex tabula ſuperiori radicem primi membri ad ſiniſtram, nempe 18, hoc eſt radicem proxime minorem ex dictis num. 1. ſcilicet 4, quam pone dextrorſum poſt lineam, ut in *B*.

3. Duc radicem 4 in ſe ipſam, & quadratum 16 pone ſub ipſo membro 18, ex quo ſubtrahatur; tum reſiduo 2 (quod notatur infra lineam) adde ſequentes duas figuras 66, quæ ſimul faciunt 266.

4. Radicem ipſam 4 duplica, fit 8, quem pone in *C* pro diviſore numeri 26 (excluditur enim ſemper a diviſione figura notata puncto) & quotum inventum 3 appone tum radici in *B*, tum diviſori in *C*, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes nume-

numeros in *C* poſitos, & productum 249 ſubſcribe numero *266*; a quo facta ſubtractione, remanent 17.

6. Adde huic reſiduo ſequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rurſus inſtitue: nimirum duplica totam radicem *B*, habebis *86*, quem pone in *D* pro diviſore numeri 172 (excluſa figura ultima) quotus erit 2, quem appone tum radici in *B*, tum diviſori in *D*, & per ipſam radicem 2 multiplica numeros omnes in *D* *862*. Deinde productum 1724 ſubſcribe ipſi numero 1724, a quo debet ſubtrahi; cumque nihil remaneat, ſignum eſt, datum numerum eſſe vere quadratum.

```
           A 186624      B
             16         (432
          -------
C 83)       -266
             249
          -------
D 862)     -1724
            1724
          -------
            0000
```

Sit aliud exemplum. Extrahenda eſt radix quadrata ex dato numero *M 6015625*.

1. Dividatur in membra per puncta, incipiendo dextrorſum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad ſiniſtram continet unam figuram tantum *6*. Hujus radix proxime minor eſt 2, quam pone in *N* dextrorſus, ejuſque quadratum 4 ſubtrahe ex

Digitized by Google

primo membro *6*, remanent *2*, quibus adde duas figuras ſequentis membri, nempe 01, fiunt 201.

2. Duplica radicem 2, & per ejus duplum 4, quod pone dextrorſum in *R*, divide 201 (relicta ſemper ultima figura notata puncto) quotus eſt *5*, qui reponi deberet tum in *N*, tum in *R*, & per ipſum multiplicari numeri in *R*, nempe *45*; ſed quia *45* x *5* producit 225, quod ſubtrahi nequit ex numero 201, ut patet, proinde quotus *5* minuitur unitate, & ponitur tam in *N*, quam in *R* quotus 4, qui ductus in 44, producit 17*6*, quod ſubtractum ex 201 relinquit 2*5*.

3. Adde huic reſiduo duas ſequentes figuras *56*, efficiunt 2*556*. Repetenda eſt eadem operatio toties, quot reſtant membra in dato numero. Nimirum duplicanda eſt radix 24, & per ejus duplum 48, quod ponitur dextrorſum in *Q*, dividenda ſunt 2*55* (relicta ultima figura) quotus *5* eſt nova radicis figura, quæ ponitur in *N*, tum etiam in *Q*, & per ipſam multiplicando omnes figuras in *Q* exiſtentes, habetur productum 242*5* ſubtrahendum ex 2*556*, factaque ſubtractione, habetur reſiduum 131. Cui adde ultimas duas figuras 2*5*, & operare ut ſupra, invenies ultimam radicis figuram 2, quam pone in *N* & *S*, ac cetera proſequere, ut ſæpius dictum eſt.

Eſt igitur radix quæſita *N* 24*5*2, & remanet 3321, adeoque numerus datus non eſt revera quadratus.

Coroll. Hinc patet, radicem inventam per diviſionem, unitate eſſe minuendam, ſi productum, quod fit ex multiplicatione, majus ſit numero, a quo ſubtrahi debet; ut in ſecunda figura radicis inventæ factum eſt: quod quidem notetur.

```
         M 6015625     (N
                        (2452
           4
R 44)      201
           176
Q 485)    -2556
           2425
S 4902)   -13125
            9804
            3321
```

SCHOL. I. *Quando diviſor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cyphra, ſeu zero, ut ſi extrahenda ſit radix quadrata ex* 3714. *Quia ſublato ex primo membro* 37 *quadrato* 36 *radicis inventæ* 6, *remanet* 1, *cui ſi addatur ſequens figura* 1 *fit* 11. *(nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis) qui numerus dividi nequit per duplum radicis* 6, *nempe* 12; *in hoc caſu ponitur in radice cyphra* 0, *critque radix* 60, *& habetur reſiduum* 114, *cui adduntur ſtatim (ſi ſint) aliæ duæ figuræ dati numeri.*

SCHOL. II. *Si numerus datus non eſt quadratus, ſed remanet reſiduum, ut in allato exemplo reſiduum* 114; *tunc fit ex reſiduo fractio, in qua reſiduum ipſum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radicis inventæ. Si vero reſiduum ſit majus ipſa radice, tunc duplo radicis inventæ additur unitas. Sic in eodem exemplo, quia reſiduum* 114 *majus eſt tota radice* 60,

addi-

addita unitate ad duplum ipſius radicis, erit fractio $\frac{114}{121}$, *ac tota radix* $60+\frac{114}{121}$.

Schol. III. *Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam* 2, *vel* 3, *vel* 7, *vel* 8, *vel cyphram unam; ſed neceſſe eſt, ut ſit una ex his* 1, 4, 5, 6, 9, 00, *quibus conſtant numeri ſimplices quadrati*.

Schol. IV. *Extractio radicis quadratæ non eſt aliud niſi quædam diviſionis ſpecies, ut ex ipſa operatione manifeſtum eſt; hoc tamen diſcrimine, quod in diviſione communi diviſor eſt numerus datus, in hac vero debet inquiri diviſor, & quidem per plures partes, quæ ſunt ipſa radix. Proinde multiplicando radicem per ſe ipſam, v.g. in primo exemplo* 432 × 432, *reſtituitur numerus quadratus* 186624, *ut fieri ſolet in diviſione communi, ducendo quotum per diviſorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando ſcilicet per ſe ipſam radicem inventam*.

Demonſtr. pendet a *Prop.* 4. *lib.* 2. *Eucl.* Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex 432 × 432, continet primo quadrata partium 4, 3, 2. Secundo, bis rectangulum 4 × 3. Tertio, bis rectangulum ex 43 × 2, ſeu rectangulum ex duplo ipſius 43, nempe 86 × 2; quod patet ad oculum, nempe:

```
1 6 . . . .
  1 2 . . .
  1 2,9 . .
      8 6 .
      8 6,4
-----------
1 8 6 6 2 4
```

Ex

Ex ſpecioſa tamen id longe clarius apparet, ſi loco numerorum 4, 3, 2, ſumantur literæ $a + b + c$; ut in noſtris *Inſtit. Analyt.* videre eſt.

PROPOSITIO II.

Radicem quadratam per approximationem inquirere.

Extracta radice quadrata, ſi quid remanet, ſignum eſt, talem numerum non eſſe revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi poſſit. Quamvis autem vera radix ſit impoſſibilis, poteſt tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magiſque approximari, ita ut exceſſus, vel defectus a vera radice ſit minimus. En praxis.

Adde numero, qui remanet poſt extractionem radicis, tot cyphrarum paria, quot volueris, nempe 00, ſeu 0000, vel 000000 &c. & ex numero reſiduo una cum prædictis cyphris extrahe radicem ſecundam, ut moris eſt. Aufer deinde ex radice tot figuras (a dextera incipiendo) quot fuerunt paria cyphrarum additarum. Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem una cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablatæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot paria fuerunt addita.

Sit exemplum. Extrahenda eſt radix ex numero 12, patet radicem eſſe 3, & remanere 3. Adde ipſi 12 tria cyphrarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero ſecunda radix *per Prop.* 1. *hujus* invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cyphra-

phrarum paria addita, erit radix $3 \frac{464}{1000}$ vera quidem minor, ſed propinquior, & exactior, quam radix primo inventa.

Schol. I. *Si numero, ex quo radix ſecunda extrahitur, minutia adhæreat, reducitur minutia in partes centeſimas, & extrahitur radix. Extrahenda ſit radix ex* $6 \frac{1}{4}$, *reduc fractionem in centeſimas per regulam proportionum (de qua inferius) dicendo, ut* 4 . 1 :: 100 . 25, *erit igitur fractio* $\frac{25}{100}$, *cui adde* 6, *fit* $\frac{625}{100}$, *cujus radix quadrata erit* $2 \frac{5}{10}$.

Schol. II. *Quod ſi extrahenda ſit radix ex meris fractionibus, extrahitur radix de more, ſed ſeorſim ex numeratore, & ſeorſim ex denominatore. Sic radix quadrata fractionis* $\frac{4}{9}$ *erit* $\frac{2}{3}$. *Similiter radix fractionis* $\frac{36}{100}$ *erit* $\frac{6}{10}$.

Schol. III. *Via autem omnium expeditiſſima ad inveniendam radicem quadratam dati numeri maxime propinquam, habetur per Logarithmos.*

PROPOSITIO III.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere.

1. Divide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorſum, ita ut ſingula membra contineant tres figuras, excepto primo membro, quod aliquando duas tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radicis inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri ſiniſtrorſum, ſi ſit numerus cubicus; ſin minus, ſume radicem cubi

cubi proxime minoris in tabella *Propoſ.* 1. *hujus*, quæ in hoc exemplo eſt 2, quam pone ad dexteram, ut in *B*.

2. Ex hac radice fiat cubus 8, quem ſubtrahe ex primo membro 12, & reſiduum 4 ſcribe infra lineam, ut in *C*.

3. Ad hunc reſiduum adde unam ſequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radicis figura, quam pone in *B*.

4. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui ſubtrahi debet ex utroque membro numeri *A*. Cumque nihil remaneat, ſignum eſt, numerum datum eſſe revera cubum.

	A 12,167	(*B*
	8	(23
12)	*C* 41	

Hæc operatio toties repeti debet, quot ſunt membra numeri dati, ut in ſequenti exemplo erit manifeſtum.

Sit aliud exemplum. Eſto numerus *M* 11390625, cujus radix cubica quæritur.

1. Radix cubica primi membri 11 eſt 2, quam pone in *N*, ejuſque cubum 8 ſubtrahe ex 11, remanet 3, quem ſcribe infra lineam in *R*.

2. Adde reſiduo *R* ſequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ 2, hoc eſt per 12, quotus 2 erit ſecunda figura radicis, quam pone in *N*.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero *S* 11390, nempe ex duobus membris numeri dati *M*, remanent 742, ut in *T*.

4. Ad hoc reſiduum T addatur ex tertio membro numeri M figura 6, fiet 7426, qui diviſus per triplum quadrati radicis inventæ 22, hoc eſt per 1452, dat quotum 5, qui ponatur in N, eritque tertia radicis figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe 11390625, qui ablatus ex numero M nihil relinquit, proinde numerus datus eſt cubus.

```
            M  1 1,3 90,6 2 5      ( N
                  8                ( 225
   12)      R    33
            S    11390
                 10648
1452)       T  —742,6
```

Ratio autem pendet ab ipſa cuborum geneſi. Nam in priori exemplo cubus 12167, qui oritur ex radice 23, continet primo cubos 8 & 27, partium 2 & 3. Secundo triplum quadrati radicis 2 x 3. Tertio triplum quadrati radicis 3 x 2, hoc eſt

```
 8 . . .
 3 6 . .
   5 4 .
     2 7
 1 2 1 6 7
```

Coroll. Hæc praxis omnium facillima, traditur a Newtono in *Arithmet. Univ.*, & tribus pauciſſimis continetur: 1. Ad reſiduum, quod oritur ex ſubtractione cubi ex unoquoque numeri dati mēbro, additur una tantum ſequentis

tis membri figura. 2. Diviſo illo reſiduo una cum figura adjecta per triplum quadrati inventæ radicis, quotus dat alterius membri radicem. 3. Ex numeris radicalibus (quotquot illi ſint) fit cubus, qui ſubtrahitur ex totidem membris numeri dati, quot ſunt ipſi numeri radicales inventi. Quæ quidem ex allatis exemplis ſatis patent.

SCHOL. I. *Cum aliquid remanet, ſignum eſt, numerum datum non eſſe exacte cubicum, ac proinde radicem inventam non eſſe numeri dati, ſed maximi cubi in eo contenti.*

SCHOL. II. *Si quis propinquiorem radicem, & quæ a vera inſenſibiliter differat, cupit, addat aliquot cyphrarum ternarios ad ipſum numerum datum, & proſequatur radicis extractionem. Deinde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figuræ, quot cyphrarum ternarii fuerunt adjecti; reliquæ enim figuræ dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipſæ figuræ rejectæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot ternarii cyphrarum fuerunt additi, eo fere modo, quo de radice quadrata diximus.*

SCHOL. III. *Ceterum tam cubica, quam aliæ ſuperiorum poteſtatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur, maxime per formulas Newtonianas, quæ generales ſunt, & ad omnem radicem extrahendam valde faciles, & expeditæ. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.*

Examen habetur ter ducendo in ſemet radicem cubicam inventam, & addendo illi reſiduum, ſi quod fuit. Reſtituitur enim cubus, ſeu numerus datus, ſi erratum non fuerit.

CAPUT V.

De Regulis Arithmeticis.

Regulæ Arithmeticæ ſunt quatuor. 1. Eſt regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Poſitionis, vel falſi. Prima eſt omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla ſunt, de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

DEFINITIONES.

I. Duæ proportiones dicuntur *ſimiles*, *eædem*, vel *æquales* (quod idem eſt) cum antecedens unius toties continet ſuum conſequentem, quoties antecedens alterius continet ſuum conſequentem. Vel cum conſequens unius toties continetur in ſuo antecedenti, quoties conſequens alterius continetur in ſuo antecedenti. Sic 12.4 :: 3.1. ſunt proportiones ſimiles, vel eædem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent ſuos conſequentes 4 & 1, vel quia 4 & 1 ter continentur in ſuis antecedentibus 12 & 3.

II. Comparatio unius proportionis ſimilis cum alia ſimili, ut 12.4 :: 3.1. dicitur *Proportionalitas*, illi autem quatuor termini dicuntur *Proportionales*. Qui dicuntur *continue proportionales* cum medii termini bis ſumuntur. Semel enim eadem quantitas eſt conſequens reſpectu præcedentis, & ſemel antecedens reſpectu con-

conſequentis. Sic 2, 4, 8, 16 dicuntur continue proportionales, quia 4 & 8 bis ſumuntur. Nam dicitur eſſe 2 ad 4, ut 4 ad 8. Item 4 ad 8, ut 8 ad 16. Si vero fuerit 10.5 :: 2.1. dicuntur termini *diſcretim proportionales*.

LEMMA I.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale eſt facto ex ſecundo, & tertio. Eſt *Propoſ.* 19. *l.* 7. *Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5.20 :: 4.16

Sicuti 5 X 16 dant = 80

Ita etiam 20 X 4 dant = 80

LEMMA II.

Si datis quatuor numeris, primus ſe habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad ſecundum, factum ex primo, & ſecundo æquale erit facto ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 eſt eadem proportio dupla, quæ eſt inter 8 & 4, erit 6.3 :: 8.4; ergo ex *lem.* 1. 6 X 4 = 3 X 8 = 24, ergo factum ex primo, & ſecundo æquatur facto ex tertio, & quarto.

LEMMA III.

Si factum dividatur per unum ex ſuis factoribus, prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v.g. 24, quod ortum ſit ex 4 X 6, ſi dividatur per 4, oritur 6; ſi dividatur per 6, oritur 4.

PRO-

PROPOSITIO I.

De Regula Proportionum.

Regula *Proportionum*, quam ob præſtantiam, & immenſam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum ignotum proportionalem, qui nimirum habeat eandem proportionem ad tertium numerum datum, quam ſecundus habet ad primum, ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quartum. En praxis.

I. Diſponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæſtionem habet annexam, ſtatuatur tertio loco; ille vero ex duobus aliis, qui cum hoc eſt homogeneus, hoc eſt qui eandem rem ſignificat ac terminus tertio loco poſitus, primo loco ponatur.

II. Multiplica tertium per ſecundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæſitum. Res tribus exemplis illuſtratur.

1. Ulnæ panni 3 ſtant ſcutis 9, quot ſcutis ſtabunt ulnæ 12 ejuſdem panni? Terminus, qui habet annexam quæſtionem, ſunt ulnæ 12, hic ſtatuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, ſcilicet

Ulnæ 3 . *ſcut.* 9 :: *ulnæ* 12 . *ſcut.* . . . .

Duc 12 x 9, & productum 108, divide per 3, quotus 36 dat quartum proportionalem quæſitum. Nam, ut patet, 3 . 9 :: 12 . 36

2. Pro

2. Pro alendis 4 convictoribus expenduntur ſingulis menſibus aurei 48, quot aurei neceſſarii erunt ad alendos convictores 20? Diſponantur termini modo explicato, nimirum

Conv. 4. *aur.* 48 :: *Conv.* 20. *aur.* ...

Duc 48 X 20, & productum 960 divide per 4, quotus 240 dat quartum proportionalem quæſitum, nempe:

4 . 48 :: 20 . 240

Nam ſicuti 4 duodecies continetur in 48, ita 20 duodecies continetur in 240. Multiplicando enim 20 X 12, fit 240.

3. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet quotidie ſolviſſe aſſes 10. Quot ſcuta Romana ſingulis diebus expendit?

Si oper. 1. *aſſes* 10. *quid oper.* 180000?

Multiplicatis 180000 X 10, habetur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto proportionali aſſes 1800000. Hos divide per 100 (reſectis duabus cyphris) fiunt ſcuta Romana ſingulis diebus ſolvenda 18000.

SCHOL. I. *Si quis terminus numeris heterogeneis conſtet, reduci debet ad homogeneum. Ut ſi quæſtio ſit, libræ* 5, *atque unciæ* 3 *alicujus mercis veneunt ſcutis* 4, *&* *aſſibus* 50; *quot ſcutis ſtabunt libræ* 12? *Primo reducantur libræ ad uncias tam in primo, quam in tertio termino, multiplicando illas per* 12. *Secundo ſcuta reducantur ad aſſes, multiplicando illa per* 100. *Proponenda* *ergo*

ergo erit quæſtio in terminis homogeneis ſic : ſi unciæ 63 *veneunt aſſibus* 450 , *quid unciæ* 144 ?

Schol. II. *Cum integris adhærent fracti , prius integri reducuntur ad fractos : integris autem , quibus nulla eſt fractio , ſupponitur unitas ; deinde regula proportionum fit , ut dictum eſt . Si dicatur , hora* $1\frac{1}{4}$ *fluunt ex aliquo canali libræ* 15 *aquæ , quot libræ fluent horis* $2\frac{1}{5}$? *Termini proportionales redacti erunt* $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{11}{5}$. *Tum operando juxta præcepta tradita in* Propoſ. 10 , *&* 11. Cap. 3. , *invenies aquæ libras* $26\frac{2}{5}$.

Demonſtr. clare infertur ex *lemm.* 1. *&* 3. Nam cum in regula proportionum ſupponantur dati tres numeri proportionales , & quartus , qui eſt ignotus , dari poſſit ; factum ex ſecundo , & tertio æquale erit (*per lem.* 1.) facto ex primo , & quarto , qui eſt ignotus . Proinde ſi factum ex ſecundo , & tertio dividatur per primum , innoteſcet quartus terminus (*per lem.* 3.) ; ergo patet ratio , cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per ſecundum terminum , & factum dividi per primum .

Examen regulæ proportionum omnium expeditiſſimum habetur multiplicando primum terminum per quartum , & ſecundum per tertium . Nam ſi producta ſint æqualia , res bene proceſſit . Ratio patet *ex lem.* 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

De Regula proportionum Compoſita.

Regula proportionum *Compoſita* dicitur, cum præter tres terminos in *Propoſ. præc.* explicatos, alii quoque minus principales accedunt, qui ſignificant tempus, lucrum, damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur, ut fiant tres ſolum termini. Exempla rem declarabunt.

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10 aureos 50, quæritur quot aureos ſolvere debeant juvenes 12 diebus 30? Tres principales termini ſunt juvenes 4, aurei 50, & juvenes 12. Ad juvenes 4 ſpectant dies 10, & ad juvenes 12 dies 30. Duc itaque 4 x 10, & 12 x 30, habentur duo termini compoſiti 40, & 360. Dic ergo.

Si 40 *dant aur.* 50, *quid* 360?

Multiplicando 360 x 50, & productum dividendo per 40, ut in *præc. Propoſ.* factum eſt, invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis tranſvectæ Romam per milliaria 300 poſcunt ſcuta 40; quæritur expenſa pro tranſvehendis libris 400 ejuſdem mercis per milliaria 500? Tres termini principales ſunt libræ 200, ſcuta 40, & libræ 400. Minus principales milliaria 300, & 500: qui ſi multiplicentur per ſuos termi-

nos principales, fient tres termini pro regula trium inſtituenda, nimirum

$$60000 . 40 :: 200000 . 133\tfrac{1}{3}$$

SCHOL. I. *Regula proportionum compoſita eſt regula ſimplex proportionum repetita; unde etiam regula* Dupli *dicitur, quia duplicem quæſtionem involuit. Proinde reſolvi etiam poteſt in duas regulas ſimplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quaeritur quartus proportionalis; in altera vero ponuntur circumſtantiæ, ſeu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus. Sic in ſuperiori exemplo dic, ſi libræ* 200 *exigunt ſcuta* 40, *quid libræ* 400? *Quartus proportionalis eſt* 80, *ut patet. Dic ſecundo ſic milliaria* 300 *dant* 80, *quid milliaria* 500? *Invenitur quartus proportionalis, ut ſupra*, 133 ⅓.

SCHOL. *Hæc regula dicitur etiam* del Cinque, *quia terminos quinque notos ſupponit. Examen fit ut in* præc. Propoſ.

PROPOSITIO III.

De Regula proportionum Inverſa.

IN regulis proportionum tum ſimplici, tum compoſita jam explicatis, ita ſe habet primus terminus ad ſecundum, ſicuti tertius ad quartum, ut exempla allata ſatis monſtrant; proinde ex *Propoſ.* 14. *lib.* 5. *Eucl.* ſi primus terminus major, vel minor eſt tertio, etiam

etiam ſecundus major, vel minor eſſe debet quarto, ut conſideranti patet. Solet autem nonnunquam accidere ex ipſa natura quæſtionis, ut quanto major, vel minor primus terminus eſt tertio, tanto major, vel minor reciproce eſſe debeat terminus quartus ſecundo. In hoc caſu regula proportionum dicitur *inverſa*, quia ſcilicet terminorum ordo invertitur. Hærent hic tyrones primo non bene dignoſcentes, utra regula ſit adhibenda. Sed quæ ſequuntur exempla, rem ſatis illuſtrant.

1. Meſſores 20 ſegetem aliquam metunt diebus 4, quæritur quot diebus illam metere poſſint meſſores 10? Patet majori tempore, adeo ut quanto major eſt terminus primus tertio, tanto major quoque debeat eſſe quartus incognitus ſecundo. Nam

Meſſ. dies Meſſ. dies
20 . 4 :: 10 . 8 .

2. In obſeſſa Urbe ali poſſunt milites 1500 menſibus 3, quæritur quot milites ali poterunt menſibus 6? Certe minorem numerum. Proinde quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor quartus erit ſecundo, ſcilicet

Menſ. Mil. Menſ. Mil.
3 . 1500 :: 6 . 750.

3. Ex panno, quod habet latitudinem palmorum 3, requiruntur mihi pro veſtibus ulnæ 10, quæritur quot ulnæ requirantur ex alio panno, quod latitudinem habet palmorum 4. Certum eſt, pauciores requiri, adeo-

que quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor erit quartus ſecundo, nempe

Lat.pal.	*uln.*		*lat.pal.*	*uln.*
3.	10	::	4.	$7\frac{1}{2}$

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inverſa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per ſecundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis 20×4, productum 80 dividatur per 10, habetur quartus proportionalis 8.

Demonſtr. ſequitur ex 2. & 3. *lemm.* Nam in regula proportionis inverſa cum ſe habeat primus terminus ad tertium, ut reciproce quartus ad ſecundum, erit ex 1. *lemm.* productum ex primo & ſecundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem, quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus ſcilicet tertio loco poſitus, ergo ſi per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & ſecundo, prodibit ex *lem.* 3. quartus proportionalis quæſitus.

Examen itaque regulæ inverſæ fit breviſſime, multiplicando primum terminum in ſecundum, & tertium in quartum. Nam ſi producta ſint æqualia, res bene peracta eſt.

Schol. I. *Arithmetici, in quibus Tacquet, aſſignant dignoſcendæ hujus regulæ indicium hujuſmodi. Cum proponitur aliqua res diverſa a quatuor terminis quæſtionis, tunc proportio erit reciproca, ſeu inverſa. Sic in primo exemplo proponitur ſeges metenda, quæ eſt res omnino diver-*

diverſa a quatuor terminis proportionalibus. In ſecundo exemplo proponitur annona, quæ eſt res diverſa a quatuor terminis ejuſdem quæſtionis. Similiter in tertio veſtis conficienda, quæ proponitur, eſt quid diverſum a terminis in quæſtione datis. Hoc dictum ſit in gratiam tyronum. Ceterum ex ipſa quæſtionis natura facile dijudicari poteſt, utrum proportio directa ſit, an inverſa.

Schol. II. *Si terminus, qui annexam habet quæſtionem, ponatur primo loco, ſecundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inverſa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo meſſores* 10 *ſe habent ad meſſores* 20, *ut dies* 4 *ad dies* 8, *proinde ducendo* 20 X 4, *&* *dividendo productum* 80 *per primum terminum* 10, *habetur quartus proportionalis, ut in* Propoſ. 1. hujus. *Similiter in ſecundo exemplo menſes* 6 *ad menſes* 3 *ita ſe habent, ut milites* 1500 *ad milites* 750, *adeoque producta ex* 3 X 1500 *diviſo per primum terminum* 6, *oritur quartus proportionalis* 750, *ut antea.*

Schol. III. *Regulam inverſam compoſitam ultro omittimus, quod tyrones haud parum ſoleat confundere, & in rebus Geometricis, vel etiam in hominum commercio vix unquam occurrat.*

PROPOSITIO IV.

Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.

I. CUM in regula directa primus terminus præciſe continet ſecundum, vel (quod idem eſt) præ-

ciſe

ciſe continetur in ſecundo, tunc reduci poteſt proportio ad minimos terminos per *Prop.* 2. *cap.* 3., & regulæ praxis breviſſima evadit. Sit exemplum, lib. 4. valent ſcuta 12, quid libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos 1 & 3, dic ſi 1 dat 3, quid 9? & ducendo 3 x 9, habetur quartus proportionalis 27, quia unitas non dividit.

Pro regula inverſa in 1 exemplo *Prop.* 3. Si meſſores 20 exigunt dies 4, quid meſſores 10? Quia 20 ad 10 ſe habere debet reciproce, ut quartus terminus ad ſecundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic ſi 2 dat 4, quid 1? ductiſque 2 x 4, habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad evitandum diviſionis prolixioris tædium, dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in ſecundum: vel dividatur ſecundus per primum, & quotus ducatur in tertium; in utroque enim caſu operatio fit brevior. Ut ſi leucæ 25 dant milliaria Italica 60, quid leucæ 100? Diviſis 100 per 25, duc quotum 4 x 60, erit 240 quartus proportionalis quæſitus. Vel diviſo 60 per 25, quotus $2\frac{2}{5}$ ducatur in 100, productum $\frac{1200}{5}$, ſeu 240, erit quartus proportionalis quæſitus.

III. Regula proportionum confici poteſt per ſolam diviſionem, nimirum dividendo primum terminum per ſecundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2 gradus circuli maximi terræ continent milliaria Italica 120, gradus 360 quot milliaria continebunt. Diviſo primo termino per ſecundum, habetur $\frac{2}{120}$, hoc eſt $\frac{1}{60}$; per hunc divide 360, quotus $\frac{21600}{1}$ dat milliaria Italica quæſita. IV. Si

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut ſi dicatur $12\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales ſine fractionibus 25, 4, & 40. Similiter ſi fractiones ejuſdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut ſi dicatur $3\frac{2}{5}$ dant 20, quid $10\frac{3}{5}$? Multiplicatis iiſdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula ſine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Quibuſcum regula de more peragitur. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, ſatis patet.

SCHOL. *Hæc, aliaque ſimilia compendia dicuntur* Italica, *vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia uſum habeant frequentiorem.*

PROPOSITIO V.

De Regula Societatis.

Regula, quæ docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturæ ſocietatem ineuntes frequenter adhiberi ſoleat. Ecce exempla.

Mercatores *A*, *B*, *C*, ſocietate inita, lucrati ſunt aureos 800. *A* poſuit in ſortem communem aureos 100, *B* aureos 160; *C* vero 240: quæritur quantum quiſque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam ſummam ſingulorum pecuniam, nempe aureos 500, Deinde inſtituatur toties regula proportionum, quot ſunt ſingulorum pecuniæ, ita ut primus terminus ſemper

per

Digitized by Google

per ſtatuatur ſumma pecuniæ collatæ, ſecundus lucrum aureor. 800, tertius vero uniuſcujuſque pecunia *A*, *B*, *C*.

Dic ergo ſi 500 dat 800, quid 100? 160
quid 160? 256
quid 240? 384
800

Patet lucrum *A* fuiſſe aureorum 160, lucrum *B* 256, & *C* 384, quæ ſimul efficiunt ſummam lucri, adeoque ſtatim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotiatione, quam pecunia alterius, tunc uniuſcujuſque pecunia multiplicari debet per ſuum tempus. Cetera peragenda, ut ſupra.

Sit exemplum. *A* poſuit in ſortem communem aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, *C* vero aureos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500: quæritur ſingulorum lucrum. Duc 50 X 2, 100 X 3, & 200 X 1, producta dant ſummam 600, quæ erunt primus terminus regulæ proportionum: ſecundus lucrum comparatum aureorum 500; tertius vero pecunia ſingulorum per ſuum tempus multiplicata.

Dic ergo ſi 600 dant 500, quid 100? $83\frac{1}{3}$
quid 300? 250
quid 200? $166\frac{2}{3}$
500

Eſt

Eſt igitur lucrum ipſius *A* aureorum $83\frac{1}{3}$. Lucrum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum $166\frac{2}{3}$, quæ addita faciunt aureorum ſummam 500.

III. Quod ſi ſingulorum pecunia æqualis fuit, tempus autem inæquale: nam *A* reliquit in ſocietate pecuniam ſuam menſibus 7, *B* vero menſibus 6, *C* denique menſibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam ſummam menſes, faciunt 25, eritque hic primus regulæ terminus, ſecundus erit lucrum, tertius menſes ſingulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, ſecundi 240, tertii 480.

Si Menſes	*aur.*	*quid menſes*	
25.	1000 ::	7?	280
		6?	240
		12?	480
			1000

COROLL. Hinc apparet modus dividendi pecuniam v. g. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino ſuo ſervierunt, quorum primus ſerviverit annis 7, ſecundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ ſimiles quæſtiones ex hac regula facile ſolvuntur, quæ non eſt, niſi regula proportionum ſæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum eſt, intelligi eodem modo debet de damno, ſi ſocietati improſpere ceſſerit, ac damnum in ſingulos ſit dividendum, habita ratione pecuniarum, & temporis.

PROPOSITIO VI.

De Regula Alligationis.

CUM variæ res diverſi pretii inter ſe alligantur; ſeu miſcentur, ut varii liquores, merces, metalla &c. atque inde pretium partibus mixti reſpondens inquiritur: ſeu, cum pretio quodam medio propoſito, quæritur, quantum ex ſingulis mercibus, aut liquoribus miſceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi poſſint; in utroque caſu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla ſatis ſuperque innoteſcet.

I. Conflanda eſt ſtatua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera poſuit, alterum quod in ſingulas libras ſtat ſcutis 30, alterum vero ſcutis 25. Ex priori poſuit libras 120, ex poſteriori libras 180. Quæritur quot ſcutis ſtabit in ſingulas libras ejuſmodi ſtatua?

Duc libras	120 X 30	*fit*	3600
	180 X 25		4500
			8100

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300, quotus 27 indicat unius libræ pretium. Nam ſi lib. 300 valent ſcut. 8100, quid lib. 1.? Ex regula aurea habetur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, menſura 1. primi generis ſtat juliis 24, ſecundi generis menſura 1. valet

valet juliis 35. Si quis non habeat niſi julios 33, & menſuram unam ex utroque vino mixtam petat, quæritur ex utroque quantum debeat accipere.

1. Pone unum pretium ſtatutum ſub altero 24 & 35, & ad ſiniſtram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia ſtatuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, ſed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 (hoc eſt 9) ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur juxta pretium minus 24, ut in ſequenti exemplo factum vides.

2. Colligantur differentiæ in unam ſummam, ut hic 11, & inſtituatur regula trium toties, quot ſunt differentiæ, nempe bis in hoc exemplo; ita ut ſumma differentiarum 11 occupet primum locum, menſura vero 1 ſecundum locum, & una ex differentiis tertium. Tum dic, ſi 11 dat 1, quid 9? Rurſus, ſi 11 dat 1, quid 2? Invenies ex potiori vino accipiendas eſſe $\frac{9}{11}$ unius menſuræ, ex ſecundo vero $\frac{2}{11}$, quæ ſimul ſumptæ faciunt $\frac{11}{11}$, hoc eſt menſuram unam quæſitam.

	Pretia	*Differ.*		
33	24	2	Si 11 dat 1, quid 2?	$\frac{2}{11}$
	35	9	quid 9?	$\frac{9}{11}$
	Summa	11		$\frac{11}{11}$

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia ſtatuta proponuntur, ita tamen ut ſaltem unum ſit majus, alterum vero minus pretio arbitrario; tunc

 plures

Digitized by Google

plures fieri debent alligationes, quod exemplo ſatis vulgari explicatur.

Libra 1 Garyophili valet juliis 3. Piperis libra, juliis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gratia ſint *A*, *B*, *C*, *D*. Pretium vero medium ſit *M*. Quæritur, quantum quis debeat ex ſingulis accipere; ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo diſponantur ordinatim pretia, ut in exemplo ſequenti. Secundo alligentur inter ſe duo pretia *A* & *D*, hoc eſt comparentur ambo cum pretio *M*, ut inveniantur differentiæ exceſſus, & defectus, nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta *A* & *D* modo ſuperius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia *B* & *D* (idem pretium alligari poteſt pluries) differentiæ exceſſus eſt 2, defectus autem eſt 3, quæ ponantur alternatim juxta *B* & *D*. Similiter alligentur *C*, & rurſus *D*, differentiæ ſunt 2 & 1, quæ pariter ſtatuantur alternatim juxta *C* & *D*.

3. Colligantur omnes illæ differentiæ in unam ſummam, quæ hic eſt 14. Deinde dic, ſi 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit $\frac{2}{14}$, ſeu $\frac{1}{7}$; quod toties iteretur, quot ſunt pretia data *A*, *B*, *C*, *D*, adeo ut tres differentiæ 4, 3, 1, quæ appoſitæ ſunt ipſi *D*, addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

		Pretia		*Differ.*
M 7	*A*	3		2.
	B	4		2.
	C	6		2.
	D	9		4. 3. 1.
			Summa	14

Si

Si 14 dat lib. 1. quid 2 ? $\frac{2}{14}$
2 ? $\frac{2}{14}$
2 ? $\frac{2}{14}$
8 ? $\frac{8}{14}$
Summa $\frac{14}{14} = 1$.

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo $\frac{14}{14} = 1$.

Demonſtr. Summa differentiarum, quibus pretia ſtatuta differunt per exceſſum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem, quam habent ſingulæ differentiæ ſeorſim ſumptæ ad ſingulas partes mixti ſeorſim ſumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot ſunt differentiæ: quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compenſari valeat per exceſſum alterius pretii. Quod &c.

Coroll. I. Ex ſuperiori exemplo manifeſtum eſt, unumquodque pretium ſaltem ſemel alligari debere, idemque pretium poſſe pluries aſſumi, ut factum eſt cum pretio *D*.

Coroll. II. Alligationes hujuſmodi fieri poſſunt variis modis, ſiquidem pretium medium ſemper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diverſa autem alligatione, diverſa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto poſita, ut patet.

PRO-

PROPOSITIO VII.

De regula ſimplicis Poſitionis, ſeu falſi.

EA regula *falſi* dicitur, quæ ex poſitione numeri plerunque falſi docet verum numerum invenire, qui quæſtioni ſatisfaciat. Dicitur *ſimplicis Poſitionis*, ſi ſimplex ponatur numerus, ut in hac Propoſ. fiet; duplicis vero, ſi duo numeri aſſumantur, ut in *Prop. ſeq.*

Regula ſimplicis Poſitionis in tribus conſiſtit, nempe

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad ſolvendam quæſtionem, qui dicitur *Poſitio*.

2. Examinatur ille numerus, an talis ſit, qualis exquiritur.

3. Inſtituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius teſtamento mandavit, aureos centum diſtribui in tres fratris ſui filios *A*, *B*, *C* hac lege, ut *A* habeat partem duplam *B*, & *B* partem triplam ipſius *C*. Quæritur quantum ſinguli debeant accipere.

Pone *A* habere aureos 6, habebit *B* aureos 3, *C* vero 1. Examina, an tres illæ partes 6, 3, 1 ſimul efficiant 100 (nam ſi 100 efficerent, problema eſſet abſolutum) ſed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falſa poſitione provenit, ut hic 10: ſecundo loco ſtatuitur numerus primo aſſumptus, ſeu Poſitio, ut hic 6; tertio loco numerus datus in quæſtione, hoc eſt 100, invenies 60. Itaque *A* habebit 60 aureos, *B* 30, *C* vero 10, quorum ſumma eſt 100, ſcilicet

10 . 6 :: 100 . 60.

II.

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, reſpondit, aureorum meorum $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$ faciunt ſummam 470. Quæritur ea ſumma? Patet hic quæri numerum, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ ſimul ſumptæ efficiant 470. Ad evitandas fractiones aſſume numerum, qui contineat partes in quæſtione expreſſas. Eſto hic 60, cujus $\frac{1}{3} = 20$, $\frac{1}{4} = 15$, $\frac{1}{7} = 12$, quæ partes additæ faciunt 47. Debebant autem efficere 470. Inſtitue regulam proportionum, diſpoſitis terminis modo ſuperius explicato, nimirum

$$47 . 60 :: 470 . 600$$

Habebat ergo Cajus aureos 600, quorum $\frac{1}{3} = 200$, $\frac{1}{4} = 150$, $\frac{1}{7} = 120$, quæ partes ſimul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima ſingulis horis molit tritici modios 7, ſecunda 6, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici modii 360, omnibus illis molis ſimul adhibitis.

Pone requiri horas 5, hoc tempore prima mola conficit modios 35, ſecunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes ſunt modii 100, debebant autem eſſe 360. Inſtituatur ergo regula proportionis: ſi modii 100 poſcunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

$$100 . 5 :: 360 . 18$$

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, ſecunda 108, tertia 72, quarta 54, qui ſimul additi efficiunt modios 360.

Demonſtr. Ut ſe habet (in primo exemplo) 10 ad $6 + 3 + 1$ ſimul ſumptos in falſa poſitione, ita ſe habet in

in vera poſitione 100 ad 60 + 30 + 10 ſimul ſumptos. Proinde regula ſtat in hoc, ut numerus falſus 10, productus per numerum falſum 6, ita ſe habeat per regulam auream ad ipſum numerum falſum 6, ſicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

PROPOSITIO VIII.

De Regula duplicis Poſitionis.

Regula *duplicis Poſitionis* non unum, ſed duos ſupponit numeros, ut in *Propoſ. præc.* dictum eſt, ſolvitque plures quæſtiones, quæ per unam poſitionem reſolvi nequeunt. Omnes tamen quæſtiones, quæ per unam poſitionem ſolvuntur, etiam per duas ſolvi poſſunt. Quando autem duplici poſitione opus ſit, indicabitur inferius in *Schol.* 1. En regulæ ordo.

1. Pone pro numero quæſito quemcunque numerum, qui dicitur *Poſitio*, & cum eo procede juxta tenorem quæſtionis; cui ſi non ſatisfaciat, errorem (hoc eſt exceſſum, vel defectum, quo poſitio aberrat a numero quæſito) ſubſcribe eidem poſitioni, cum ſigno +, vel —, quorum unum plus, ſive exceſſum, alterum minus, ſeu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priori major, vel minor, cum quo ſimiliter examinetur quæſtio propoſita, cui ſi non ſatisfaciat, errorem pariter ei poſitioni ſubſcribe cum ſignis +, vel —. Cum ambo errores ſunt per exceſſum, vel ambo per defectum, dicuntur *ſimiles*. Cum autem unus eſt per exceſſum, alter per defectum, hoc eſt cum ſignis diverſis + & —, dicuntur errores *diſſimiles*.

3. Si

3. Si errores ſunt ſimiles, ducatur prima poſitio in errorem poſitionis ſecundæ, & viciſſim poſitio ſecunda in errorem primæ poſitionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæſitus.

4. Si errores ſunt diſſimiles, productorum ſumma dividitur per ſummam errorum, quotus dat quæſitum.

I. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrati ſunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*, *C* tantundem quantum *B*, & inſuper 10, quæritur lucrum ſingulorum.

Pone lucrum *A* fuiſſe 4, lucrum *B* erit 9, *C* vero 19. Adde ſimul 4, 9, 19, fiunt 32, debebant eſſe 47, eſt ergo error, ſeu defectus in 15.

Rurſus pone lucrum *A* fuiſſe 7, erit lucrum *B* 12, *C* vero 22, qui ſimul faciunt 41, quæ ſumma deficit a vera 47 per defectum 6.

Cum itaque duo errores ſimiles ſint (nempe ambo per defectum) duc poſitionem 4 in errorem ſecundæ poſitionis, hoc eſt in 6; & poſitionem 7 in errorem 15, fiunt duo producta 24, & 105, quorum differentia eſt 81, quem divide per differentiam unius erroris ab alio, ideſt per 9, (ſubtrahendo errorem 6 ex alio errore 15) quotus 9 dat numerum quæſitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum 9, *B* vero 14, & *C* 24, quorum ſumma eſt 47.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Poſit.}\ 4,\ \textit{Err.} - 15 \\ \textit{Poſit.}\ 7,\ \textit{Err.} - 6 \end{array}\right\} 9\ \textit{diff.}$$

$$\begin{array}{rl} \textit{Prod.}\ 4 \times 6 = & 24 \\ 7 \times 15 = & \underline{105} \\ \textit{Differ.} & 81 \end{array}$$

II. Si utraque poſitio ſit excedens, praxis eſt omnino eadem. Ponamus enim lucrum *A* fuiſſe 12, erit lucrum *B* 17, & lucrum *C* 27, quorum ſumma eſt 56, excedens numerum datum 47 per errorem 9.

Pone iterum 11 pro lucro *A*, erit lucrum *B* 16, & lucrum *C* 26, quorum ſumma 53 adhuc peccat per exceſſum 6. Cum igitur errores ſimiles ſint (nempe per exceſſum) duc poſitionem 12 in errorem 6 alterius poſitionis, & poſitionem 11 in errorem 9. Tum ſubtrahe productum minus 72 ex majori producto 99, & reſiduum 27 divide per differentiam errorum 9 & 6, hoc eſt per 3, quotus 9 dat numerum quæſitum, ut prius.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Poſit.}\ 12,\ \textit{Err.}\ +9\\ \textit{Poſit.}\ 11,\ \textit{Err.}\ +6\end{array}\right\}3\ \textit{differ.}$$

$$\begin{array}{rl}\textit{Prod.} & 6\times 12 = 72\\ & 9\times 11 = 99\\ \hline & \textit{Differ.}\ 27\end{array}$$

III. Quod ſi una poſitio ſit excedens, altera deficiens, ſumma productorum dividitur per ſummam errorum, ut dictum eſt ſupra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum *A* fuiſſe 5, lucrum *B* erit 10, & lucrum *C* 20, quorum ſumma 35 deficit a ſumma data 47 per defectum 12; ſumendus eſt igitur numerus major.

Pone lucrum *A* 11, *B* vero 16, & *C* 26, ſumma omnium 53 excedit veram ſummam 47 in 6. Ducatur jam poſitio prima 5 in errorem 6, & viciſſim poſitio 11 in errorem 12. Deinde quia errores ſunt diſſimiles, adantur

dantur

dantur duo producta 30 & 132, eorumque ſumma 162 dividatur per ſummam errorum 18, quotus 9 dat rurſus numerum quæſitum, ut antea.

Poſit. 5, *Err.* — 12 } 18 *Summa*
Poſit. 11, *Err.* + 6 }

Prod. $5 \times 6 = 30$
$11 \times 12 = 132$
Summa 162

Sit aliud exemplum. Interrogatus Pythagoras de numero ſuorum diſcipulorum, reſpondit, eorum dimidium dare operam Geometriæ, quartam partem Philoſophiæ, ſeptimam partem ſervare ſilentium; inſuper tres alios ſe habere inſtituendos. Quæritur eorum diſcipulorum numerus.

Ponatur diſcipulos habuiſſe 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, ſeptima pars 8, quorum ſumma eſt 50: his addantur illi 3, fiunt 53, deberent eſſe 56; eſt ergo error per defectum 3, quem nota juxta ipſam poſitionem 56.

Rurſus ponatur diſcipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, ſeptima 16, quæ ſimul efficiunt 100, additiſque 3, fiunt diſcipuli 103. Eſt ergo iterum error per defectum 9, quem nota ad poſitionem 112.

Jam duc poſitionem primam 56 in errorem ſecundæ poſitionis, hoc eſt in 9, & viciſſim poſitionem ſecundam 112 in alterius poſitionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores ſimiles ſint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam erro-

M 2 rum

rum 6; quotus 28 dat numerum quæſitum diſcipulorum. Nam ejus dimidium eſt 14, quarta pars 7, ſeptima 4, quæ ſimul faciunt 25, additiſque 3, habetur numerus 28.

Poſit. 56, *Err.* — 3 } 6 *differ.*
Poſit. 112, *Err.* — 9 }

Prod. $56 \times 9 = 504$
$112 \times 3 = 336$
Differ. 168

Poſtremo ſunt tres numeri ignoti *a*, *b*, *c*, qui ſumpti bini dant ſummam, ut ſequitur

$$a + b = 50$$
$$b + c = 70$$
$$a + c = 60$$

Quæritur ſingulorum valor. Pone $a = 16$, erit $b = 34$, ergo $c = 36$, proinde $a + c = 16 + 36$, hoc eſt 52. Sed eſſe debebat 60; ergo poſitio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque $a = 18$, erit $b = 32$, ergo $c = 38$, adeoque $a + c = 18 + 38$, hoc eſt $= 56$, ſed debebat eſſe 60; eſt ergo rurſus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut ſupra; reperietur $a = 20$, proinde $b = 30$, $c = 40$, unde $a + c = 20 + 40$, ſeu 60, quod quærebatur.

Schol. *Indicium quando quæſtio propoſita ſolvi non poſſit per unam poſitionem, ſed duplicem omnino requirat, eſt cum quæſtioni aliquis determinatus numerus additus eſt, qui una cum numero ad libitum poſito debet aſſumi.*

ſumi. Sic in primo exemplo numeri illi determinati 5, & 10, qui adduntur numero ad libitum poſito, indicio ſunt duplici poſitione opus eſſe. Item in ſecundo exemplo determinatus ille numerus diſcipulorum 3 indicat, quæſtionem non per unam, ſed per duplicem poſitionem eſſe ſolvendam, & ſic de ceteris.

PROPOSITIO IX.

Aurificis furtum in corona Hieronis regis detegere.

VItruvius *lib. 9. Cap. 3.* refert, ab Archimede deprehenſam fuiſſe fraudem, quam artifex auream Hieronis regis coronam, admixta argenti portione, adulteraverat; ſed quo præciſe artificio id egerit, non ſatis conſtat. Duas tamen maſſas feciſſe dicitur, alteram ex auro puro ejuſdem ponderis cum corona, alteram ex argento item puro ponderis ejuſdem: tum hæc tria in vas aqua plenum ſeorſim immittens, aquam inde effluentem ſedulo exploravit, atque hinc quantum argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur coronæ pondus fuiſſe lib. 12, item auri, & argenti maſſas; & dum corona in vas aqua plenum demitteretur, effluxiſſe aquæ libras $7\frac{4}{7}$, dum autem immergeretur auri maſſa, effluxiſſe aquæ libras $7\frac{1}{7}$; immerſa demum argenti maſſa, effluxiſſe aquæ libras $10\frac{4}{7}$. Jam ex regula duplicis poſitionis ponatur, in ea corona fuiſſe auri lib. 9, erant ergo argenti lib. 3. Itaque per regulam proportionum dic, ſi puri auri lib. 12

dant

dant aquæ libras $7\frac{1}{5}$, quid lib. 9? invenies lib. $5\frac{2}{5}$. Item, ſi puri argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 3? proveniunt lib. $2\frac{7}{10}$. Adde ſimul libras $5\frac{2}{5}$, & $2\frac{7}{10}$, habentur aquæ lib. $8\frac{1}{10}$, debebant autem eſſe lib. $7\frac{4}{5}$; eſt ergo error per exceſſum $\frac{3}{10}$, qui notetur cum ſigno + una cum poſitione aſſumpta 9.

Ponatur ſecundo in eadem corona fuiſſe auri lib. 8, ergo ex argento erant lib. 4. Dic igitur per regulam auream, ſi auri puri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 8? inveniuntur lib. $4\frac{4}{5}$. Similiter, ſi argenti puri lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib. $3\frac{3}{5}$. Adde ſimul libras $4\frac{4}{5}$, & $3\frac{3}{5}$, fit ſumma librarum aquæ $8\frac{2}{5}$, debebant autem eſſe lib. $7\frac{4}{5}$. Peccatum eſt igitur rurſus per exceſſum $\frac{3}{5}$, ſeu $\frac{6}{10}$, qui notetur cum + juxta poſitionem 8, ut ſequitur

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Poſit.}\ 9,\ \textit{Err.}\ +\frac{3}{10} \\ \textit{Poſit.}\ 8,\ \textit{Err.}\ +\frac{6}{10} \end{array}\right\} \frac{3}{10}\ \textit{differ.}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Prod.} & 9 \times \frac{6}{10} = \frac{54}{10} \\ & 8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10} \\ \hline & \textit{Differ.}\ \frac{30}{10} = 3 \end{array}$$

Ductis jam $9 \times \frac{6}{10}$, & $8 \times \frac{3}{10}$ habentur $\frac{54}{10}$ & $\frac{24}{10}$; quorum differentiam $\frac{30}{10}$, ſeu 3, divide per differentiam errorum, hoc eſt per $\frac{3}{10}$, quotus $\frac{30}{3}$, ſeu 10, dat auri libras quæſitas. Erant ergo immixtæ 2 argenti libræ.

Ut fiat examen dic, ſi auri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 10? invenies lib. 6. Item, ſi argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 2? invenies lib. $1\frac{4}{5}$. Ad-

de

de igitur 6, & 1 $\frac{4}{7}$, ſumma librarum 7 $\frac{4}{7}$ dat tantum aquæ, quantum, dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. *Sed nota, non opus fuiſſe Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujuſmodi facere velit, conficere auri, vel argenti maſſas ejuſdem ponderis cum corona; ſed ſatis eſſe aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis aſſumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aquæ effluentis quantitatem proportio.*

Schol. II. *Per regulam duplicis poſitionis aliæ plures quæſtiones pulcherrimæ ſolvi poſſunt, quæ tamen longe facilius, & univerſali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propoſitionis hujus ſimplex, ac genuina demonſtratio; ut videre eſt apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis an.* 1704. *edit. Pariſ. pag.* 358. *Demonſtrationes autem aliunde petitæ prolixæ ſunt admodum, & implicatæ; quas proinde nos prætermittimus.*

PROPOSITIO X.

Datis duobus numeris tertium proportionalem invenire.

Duc ſecundum in ſeipſum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quæſitus. Dati ſint 2 & 8, quibus tertius proportionalis inquiritur. Ducatur 8 x 8, & productum 64 dividatur per 2, quotus 32 eſt numerus quæſitus. Sic 2, 8, 32, ſunt in eadem proportione ſubquadrupla. Ratio patet ex 1. *lemm.*

Schol.

Schol. *Si numeri dati ſint inter ſe primi, hoc eſt unus non ſit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, ſed fractus. Sic datis* 2 *&* 5 *invenitur per hanc Propoſit. tertius proportionalis* $\frac{25}{2}$, *hoc eſt* $12\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XI.

Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.

Medius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita ſe habet ad alterum datum, ſicut alter datorum ad ipſum; ita ut numeri dati ſint extremi, & ipſe medius: qui bis ſumitur, ſemel ut conſequens reſpectu primi, & ſemel ut antecedens reſpectu alterius.

Dati ſint numeri 4 & 16, inter quos medius proportionalis quæritur. Duc illos inter ſe, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic $4 \times 16 = 64$, cujus radix quadrata eſt 8 per *Prop.* 1. *Cap.* 3. Sunt igitur 4, 8, 16 continuo proportionales, nam 4 . 8 :: 8 . 16. Ratio patet ex 1. *lem.*

Schol. I. *Si productum ex numeris datis non ſit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non poſſit ſine reſiduo; tunc medius proportionalis inveniri nullo modo poteſt. Nam dati numeri ſint v.g.* 2 *&* 5, *radix quadrata per* Prop. cit., *&* Schol. 3. *erit* $3\frac{1}{6}$. *Adeoque erunt in continua proportione* 2, $3\frac{1}{6}$, 5, *quod eſt falſum, nam ſi reducantur ad idem nomen, erunt* $\frac{12}{6}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{30}{6}$; *ſeu*

ſeu 12, 19, 30, *qui nullo modo ſunt proportionales*, *ut patet*.

Schol. II. *Cum omne quadratum intelligi poſſit multiplicatum eſſe per unitatem*, *hinc omnis radix quadrata erit media proportionalis inter unitatem*, *& ipſum quadratum*. *Sic* 25, *radix quadrata numeri* 625, *eſt media proportionalis inter* 1 *&* 625, *proinde* 1, 25, 625 *ſunt in eadem ratione continua*. *Nam* 1. 25 :: 25. 625.

PROPOSITIO XII.

Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.

Quadratum unius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto extrahatur radix cubica per *Prop*.3. *Cap*.4., quæ erit duorum mediorum proportionalium prior. Deinde quadratum alterius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto pariter extrahatur radix cubica, quæ erit duorum mediorum proportionalium poſterior.

Dati ſint numeri 2 & 16, quos inter invenire oporteat duos medios proportionales. Quadra minorem numerum 2, ejuſque quadratum 4 duc in 16, fiunt 64, cujus radix cubica 4 erit prior duorum proportionalium. Similiter quadratum alterius numeri 16, nempe 256, duc in 2, fiunt 512, cujus radix cubica 8 erit duorum proportionalium poſterior; proinde 2, 4, 8, 16 ſunt in continua proportione, ut patet, cum ſit 2 ad 4, ut 4 ad 8, & 4 ad 8, ut 8 ad 16.

N Schol.

Schol. *Si ad numerum datum, & primum medium proportionalem inventum, quæratur tertius proportionalis* per Propoſ. 10. hujus; *vel ſi inter medium proportionalem inventum, & alterum numerum datum inveniatur medius proportionalis* per Propoſ. 11. hujus; *in utroque caſu obtinebitur ſecundus duorum mediorum proportionalium quæſitus. Ceterum ſi numeri dati ſint tales, ut inde radix cubica obtineri non poſſit ſine fractionibus, tunc medii proportionales inveniri nequeunt, ut de uno medio proportionali dictum eſt in* Schol. Propoſ. præc.

PROPOSITIO XIII.

Quæſtiones aliquot practicæ expediuntur.

Etſi quæſtiones, quas hic proponimus, ex regulis proportionum jam explicatis facile reſolvi valeant; quia tamen eas ordinare, atque expedire tyronibus negotium faceſſit, adeoque Arithmetici practici peculiares de his tractatus inſtituerunt, proinde nos præcipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipſa praxi operandi etiam methodus innoteſcat.

1. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis 8400; quærit quantum ex ſingulis 100 lucratus ſit.

Dic per regulam proportionum ſi 8400 fiunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex ſingulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel ſic, ſubtrahe 8400 ex 9072, differentia, ſeu lucrum eſt aureorum 672. Dic ergo, ſi 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea. Exa-

Examen fit ſi dicas, 100 fiunt 108, quid 8400? invenies 9072.

2. Fingamus ab eodem Lucilio ſolvendam eſſe penſionem ſcutorum 500 annis quinque, hoc eſt ſcuta 100 ſingulis annis; quam ille emit parata pecunia, ſolutis ſtatim ſcutis 400. Quæritur, quantum lucri ex ſingulis 100 percipiat.

Dic per regulam auream, ſi ſcuta 400 fiunt 500, ſeu *per Prop.*4. *hujus*, ſi 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex ſingulis 100 habet lucrum ſcutorum 25.

Examen erit, ſi dicas 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

SCHOL. *Quæſtiones hujus generis pertinent ad regulas lucri*, *ſeu* ſimplicis meriti, *ut vocant*.

3. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus ſolvendos, hoc eſt ſingulis annis aureos 220. Paratus tamen eſt ſtatim aureos 660 creditori ſolvere, ſiquidem 10 ex ſingulis 100 ſibi relaxet. Quæritur, quot aureos ſolvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 100 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot ſcilicet anni ſunt) dic ſi 110 fiunt 100, vel (*per Propoſ.* 4. *hujus*) ſi 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rurſus dic, ſi 11 fiunt 10, quid 200? invenies $181\frac{9}{11}$. Demum, ſi 11 dant 10, quid $181\frac{9}{11}$? proveniunt $165\frac{35}{121}$. Addantur ſimul 200, $181\frac{9}{11}$, $165\frac{35}{121}$. Erit ſumma $547\frac{13}{121}$. Accipiet ergo Sempronius tantum aureos $547\frac{13}{121}$.

4. Eadem ratione ſi quis ad tres annos domum conduxerit cum annua penſione ſcutorum 300; domino autem ejus domus omnem ſtatim ſummam in anteceſſum

ſolvat ea conditione, ut ſibi ſcuta 5 pro ſingulis 100 compenſet: dices, ſi 105 fiunt 100, ſeu (dividendo 105, & 100 per 5) ſi 21 fiunt 20, quid 300? invenies 285 $\frac{5}{7}$. Rurſus, ſi 21 fiunt 20, quid 285 $\frac{5}{7}$? fiunt 272 $\frac{16}{147}$. Demum ſi 21 dant 20, quid 272 $\frac{16}{147}$? proveniunt 32 $\frac{1116}{3087}$. Horum ſumma 590 $\frac{20}{100}$ (redactis fractionibus in partes centeſimas) in anteceſſum domus illius domino ſolvenda eſt.

Quod ſi aurei illi 660 a Fabio triennio poſt ſolvendi ſint; tunc additis, ut ſupra 10, ad 100, dic ſi 110 fiunt 100, ſeu, *per Prop. 4. hujus*, ſi 11 fiunt 10, quid 660? erunt 600. Rurſus, ſi 11 fiunt 10, quid 600? invenies 545 $\frac{5}{11}$. Demum, ſi 11 fiunt 10, quid 545 $\frac{5}{11}$? Fiunt 495 $\frac{105}{121}$; & hi ſolum Sempronio ſolvendi ſunt.

Vel brevius, duc 660 $\times 10 \times 10 \times 10 = 1000$, & productum 660000, divide per $11 \times 11 \times 11 = 1331$, quotus dat 495 $\frac{105}{121}$, ut antea.

Schol. *Hæc praxis vulgo dicitur*, ſcontare a capo d'anno.

5. Accepit Cajus aureos 500 cum uſura aureorum 10 ex ſingulis 100 in annum ea lege, ut niſi ſolvat ſingulis annis, fiat ex fœnore auctio ſortis. Nihil fuit a Cajo ſolutum toto triennio. Quæritur, quantum ipſe pro ſorte, atque uſuræ uſura fœneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110; deinde per regulam auream dic, ſi aurei 100 fiunt 110, ſeu ſi 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc eſt 500 pro ſorte, pro uſura vero primi anni 50. Rurſus pro ſecundo anno dic, ſi 10 fiunt 11, quid 550? fiunt 605, Demum ſi 10 dant 11, quid 605? Invenies ſummam a Cajo ſolvendam, aureos 665 $\frac{1}{2}$.

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc eſt in $11 \times 11 \times 11 = 1331$,

$= 1331$, & productum 665500, divide per 1000, nimirum per $10 \times 10 \times 10 = 1000$, quotus dat $665\frac{1}{2}$, ut antea.

Coroll. Hinc liquet, ſortem datam, nempe aureos 500, & ſummas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, & $665\frac{1}{2}$ eſſe terminos continue proportionales, cum omnes ſint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11; proinde inter ſortem datam, & ultimi termini ſummam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus fœnoris fuerunt anni. Hoc ipſum de præcedenti quæſtione debet intelligi.

Schol. *Praxis hujuſmodi, quæ apud Latinos anatociſmus, ſive uſura uſuræ, & a nonnullis uſura Judaica dicitur, eſt a lege vetita. Ab Italis vocari ſolet meritum meriti, ſeu* meritare a capo d'anno. *Hac vero regula utimur, ubi fundus ex annuis fructibus continuo augeri, ac multiplicari debet.*

6. Terentius debet Gellio pro uſura primi anni ſummam ſortis, & fœnoris ſimul ſcuta 4608, pro quarto autem anno ſcuta 6561; quæritur, quanta fuerit ſors, quantumque fœnus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, *per Prop. 12. hujus*: duc ſcilicet minorem 4608 in ſe, fit quadratum 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504. Hinc autem extrahatur radix cubica, *per Prop. 3. Cap. 4.* prodibit 5184, quæ erit duarum proportionalium minor, *per Propoſ. 12. cit.* Solvet igitur ſecundo anno pro ſorte, ac fœnore ſcuta 5184: atque hinc deducitur ſortis quæſitæ quantitas. Nam *ex præc. Coroll.* ſortis ſumma, & reliquæ omnes,

ſunt

ſunt inter ſe in proportione continuâ; proinde ſecundi anni ſumma 5184 ſe habet ad ſummam 4608 primi anni, ſicuti hæc ad ſortem quæſitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quæratur tertius proportionalis per *Propoſ.* 10. *hujus*, erit ſors quæſita 4096.

Hanc ſubtrahe ex ſumma data ſortis, & fœnoris primi anni, nempe ex 4608, innoteſcet ejuſdem ſortis uſura, ſcutorum ſcilicet 512, ſeu 12 $\frac{1}{2}$ ex ſingulis 100. Nam dic, ſi ſcuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies 112 $\frac{1}{2}$, hoc eſt 12 $\frac{1}{2}$ ex ſingulis centenis.

CAPUT VI.

De Progreſſionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

PRogreſſio eſt plurium terminorum eadem continuâ proportione procedentium. Quia vero proportionalitas alia eſt Arithmetica, in qua termini æquali exceſſu, vel defectu ſe ſuperant, ut 1, 3, 5, 7, 9, 11, qui binario numerio creſcunt, vel 15, 12, 9, 6, 3, qui ternario decreſcunt; alia eſt proportionalitas Geometrica, in qua termini ſimili ratione creſcunt, vel decreſcunt, quatenus primus toties ſecundum continet, quoties ſecundus tertium, & ſic deinceps, ut in *præc. Cap.* fuſe explicavimus: proinde progreſſio duplex eſt, alia Arithmetica, alia Geometrica. In prima termini ſervant proportionem Arithmeticam, in ſecun-

ſecunda Geometricam. Regulæ autem Progreſſionum, de quibus in præſenti agimus, conſiſtunt in hoc, ut talium progreſſionum termini in unam ſummam ſine prolixæ calculationis tædio compendioſe, ac facile colligantur. Nos de utraque hic breviter tractabimus.

Præter Arithmeticam, & Geometricam proportionalitatem, datur quoque proportionalitas Harmonica, ſeu Muſica, in qua tres numeri ita ordinantur, ut eadem ſit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi. Tales ſunt numeri 3, 4, 6; nam inter 6 & 3 eſt proportio dupla; ſicuti dupla eſt proportio differentiæ inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1.

LEMMATA.

I. IN progreſſione Arithmetica terminorum quorumcunque, ſumma duorum extremorum æquatur ſummæ duorum terminorum, qui ab extremis æqualiter diſtant. Sint

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Erit $1 + 11 = 3 + 9$. Item $1 + 11 = 5 + 7$.

II. In progreſſione Arithmetica terminorum imparium ſumma extremorum, vel duorum terminorum æqualiter diſtantium, dupla eſt termini medii.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

In hac progreſſione ſeptem terminorum ſumma $1 + 13 = 7 + 7$, ſeu 14. Item $3 + 11 = 14$, pariter $5 + 9 = 14$.

III. In

Digitized by Google

III. In omni progreſſione Arithmetica quilibet terminus continet primum, hoc eſt minimum terminum, & toties exceſſum, ſeu differentiam una minus, quot ſunt termini poſt primum uſque ad ipſum incluſive. Sint

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Terminus quartus progreſſionis 7 continet, ut patet, minimum terminum 1, & ter differentiam 2. Pariter 9, terminus quintus progreſſionis, continet 1, & quater differentiam ipſam 2. Ita quoque 11, terminus progreſſionis ſextus, continet 1, & quinquies differentiam 2 ut patet.

Coroll. Hinc habetur maximus progreſſionis terminus, ſi differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præc. progreſſione, ſi differentia 2 ducatur in 5 (numerum terminorum unitate minutum) & producto addatur minimus terminus 1, habetur maximus terminus 11.

PROPOSITIO I.

Datis minimo ac maximo progreſſionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire ſummam.

Regula hæc eſt: ſumma minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit ſummam totius progreſſionis.

Sit

Sit exemplum. Quæritur ſumma omnium campanæ pulſuum alicujus horologii Italici ab 1 hora, uſque ad 24 incluſive. Minimus terminus eſt 1, & maximus 24; horum ſumma 25 ducatur in 12, dimidium terminorum, productum 300 dat omnes campanæ horariæ pulſus unius diei.

Ratio deducitur ex *lemm.* 1. Nam cum ſumma extremorum æqualis ſit duobus quibuſque terminis æqualiter diſtantibus, rectangulum factum ex ſumma primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, neceſſario æquale erit ſummæ totius progreſſionis. Multiplicatio enim eſt idem ac compendioſa additio ex dictis *Prop.* 5. *Cap.* 1.

Coroll. Hinc infertur, ſummam progreſſionis Arithmeticæ pariter haberi, 1. Si dimidium ſummæ minimi, ac maximi termini ducatur in numerum terminorum. 2. Si ſumma minimi, & maximi ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur. 3. Quia vero in progreſſione terminorum imparium numerus medius æquatur dimidio ſummæ minimi ac maximi ex *lem.* 2, hinc ſequitur, haberi progreſſionis ſummam, ſi numerus medius ducatur in numerum terminorum imparium.

O PRO-

PROPOSITIO II.

Datis terminis maximo, & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & reſiduum divide per numerum terminorum unitate minutum, quotus dabit differentiam quæſitam.

In præc. exemplo campanæ horariæ a maximo termino 24 aufer minimum 1, & reſiduum 23 divide per numerum terminorum unitate minutum, nempe 23; quotus 1 dat differentiam quæſitam.

Ratio deſumitur ex *lemm.* 3. Nam 24 continet minimum terminum 1, & præterea toties continet differentiam, quot ſunt poſt terminum 1 uſque ad ipſum incluſive 24 termini, qui nimirum ſunt 23: proinde, ablato minimo termino, reſiduum continet toties differentiam, quot ſunt progreſſionis termini minus uno; adeoque diviſo reſiduo per numerum terminorum unitate minutum habetur differentia.

PROPOSITIO III.

Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.

DUC differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & producto adde minimum terminum, ſumma dabit maximum. *Sit*

Sit exemplum. Dux exercitus diſtribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40 ſtrenuos milites, qui primi arcem occuparunt, hoc pacto, ut ultimo, qui mœnia ſuperavit, dentur aurei 100, penultimo 130, antepenultimo 160, & ſic deinceps: quæritur, quantum retulerit pecuniæ primus. Patet minimum terminum eſſe 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & producto 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium ſcilicet primi militis. Ratio patet ex *lemm. 3, ejuſque Coroll.*

PROPOSITIO IV.

Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.

A Maximo aufer minimum, & reſiduum divide per differentiam, quotus unitate auctus dat numerum terminorum.

Sit exemplum. Empta eſt multitudo librorum hac conventione, ut minimus liber ſtet juliis 2, ſecundus juliis 4, tertius 6 &c., ultimi vero libri pretium fuit juliorum 400, quæritur librorum numerus. Aufer minimum 2 à maximo 400, & reſiduum 398 divide per differentiam 2, quotus 199 unitate auctus, hoc eſt 200, eſt numerus terminorum, ſeu librorum, qui quæritur.

Similiter artifex de opere perficiendo convenit hoc pacto, ut primo die ſolvantur ſibi aſſes 20, ſecundo die aſſes 25, tertio aſſes 30, & ſic deinceps. Ultimo

 die,

die, quo opus abſolvit, accepit aſſes 165, quæritur quot dies operi inſumpſerit. Aufer terminum minimum 20 à maximo 165, & reſiduum 145 divide per differentiam 5, quotus eſt 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propoſitionis deſumitur ex *lemm.* 3, ut manifeſtum eſt.

De Progreſſionibus Geometricis

LEMMA IV.

IN omni progreſſione Geometrica ſi terminus quilibet in ſe ducatur, & productum dividatur per terminum primum progreſſionis, quotus diſtabit à primo termino locis duplo pluribus, quam ipſe terminus.

In progreſſione *A* terminus 8 tertio loco poſitus, qui duobus locis diſtat a primo, ducatur in ſe, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 diſtabit à primo termino locis duplo pluribus, ſeu quatuor. Nam terminus 32 eſt tertius proportionalis ad duos terminos 2, & 8, per *Propoſ.* 9. *Cap.* 5. proinde 32 toties continet 8 (hoc eſt bis terminum intermedium 16) quoties 8 continet primum 2, nempe bis terminum intermedium 4; adeoque cum 32 tantundem diſtet ab ipſo 8, quantum 8 a termino primo 2 (duobus ſcilicet locis) diſtabit ipſe 32 à primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

A 2, 4, 8, 16, 32, *&c.*
0. 1. 2. 3. 4.

Co-

Coroll. Hinc ſequitur, quod ſi cuilibet progreſſioni Geometricæ ſubſcribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio à cyphra; quilibet progreſſionis terminus, qui producitur per alium in ſe ductum, & diviſum à primo, habeat ſub ſe notam duplo majorem, quam terminus à quo producitur. Sic in ſuperiori exemplo terminus 32 habet ſub ſe notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes*, *vel indices* progreſſionis dicuntur, indicant quantum quiſque terminus diſtet à primo. Locum autem, ſeu numerum terminorum progreſſionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index eſt 4, eſt quintus in progreſſione terminus. Quod notetur.

L E M M A V.

IN omni progreſſione geometrica ſi duo quilibet termini in ſe ducantur, & productum dividatur per primum terminum progreſſionis, quotus dabit terminum tot locis diſtantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum ſimul additi.

In Progreſſione Geometrica *B* ſubſcribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum eſt in *præc. Coroll.* & duo quilibet termini 10 & 40, quorum indices ſimul additi dant 4, ducantur inter ſe, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus eſt 80, cujus index pariter eſt 4, adeoque quatuor locis diſtat a primo termino per *Coroll. cit.*

B 5, 10, 20, 40, 80, 160 *&c.*
0. 1. 2. 3. 4. 5.

Co-

Coroll. Hinc ad inveniendum quemlibet progreſſionis datæ terminum, v. g. ſextum, multiplicari debent inter ſe duo termini, eorumque productum dividi per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quæſitus. Sic ad inveniendum ſextum progreſſionis *B* terminum, ductis inter ſe 20 & 40 (quorum indices additi dant 5) & producto diviſo per 5, quotus 160 erit ſextus progreſſionis terminus, ut patet.

PROPOSITIO V.

Datis minimo & maximo progreſſionis Geometricæ terminis, ac denominatore, ſummam terminorum invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & reſiduum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum ſummam.

Sit exemplum. Venditur equus eximiæ pulchritudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in ſoleis ferreis figendis adhiberi ſolent, ſolvatur pro primo clavo 1 aſſis, pro ſecundo clavo aſſes 2, pro tertio 4, & ſic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat aſſes 2147483648. Quæritur aſſium omnium ſolvendorum ſumma.

Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & reſiduum divide per denominatorem 2 unitate multatum, nempe

per

per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac reſiduum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progreſſionis ſumma 4294967295: qui aſſes ſi dividantur per 100, erit pretium illius equi ſcutorum 42949672, & aſſes 95, *per Schol. Prop. 5. Cap. 3.*

. Ratio deducitur ex *Prop. 34. lib. 9. Eucl.* Nam in omni finita progreſſione Geometrica, ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem, ita maximi & minimi differentia (ſeu maximus terminus, dempto minimo) eſt ad totam progreſſionis ſummam, minus ipſomet maximo termino; ut ſi fuerit progreſſio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81, 243, erit denominator 3 unitate multatus, ſeu 2 ad 1, ſicuti 243 — 3, ſeu 240, ad totam progreſſionis ſummam, dempto maximo termino, hoc eſt ad $3 + 9 + 27 + 81 = 120$; proinde diviſo 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progreſſionis ſumma 363.

Schol. I. *Progreſſionis duplæ ab unitate incipientis brevius habetur ſumma, ſi duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum* 2147483648, *ac deme unitatem, reſiduum dabit ſummam totius progreſſionis* 4294967295, *ut antea. Ratio per ſe manifeſta eſt, quia denominator unitate multatus eſt unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc caſu idem eſt, ac illum bis ſumere, ſeu duplicare.*

Schol. II. *Ex progreſſione dupla ab* 1 *incipiente* 1, 2, 4, 8, 16 *&c. habentur numeri, qui dicuntur* Perfecti, *qui ſcilicet omnibus ſuis partibus aliquotis æquales ſunt,*

ut 6,

ut 6, 28, 496 *&c. hoc pacto: adduntur ordinatim progreſſionis duplæ termini, donec eorum ſumma ſit numerus primus, ut* 1+2=3, 1+2+4=7, 1+2+4+8+16=31. *Tum numerus primus* 3, *vel* 7, *vel* 31 *ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic* 3 x 2=6, 7 x 4=28, 31 x 16=496. *Et ſic de aliis.*

PROPOSITIO VI.

Datis aliquot progreſſionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.

Dati ſint aliqui termini Geometricæ progreſſionis *A*, & inveniendus ſit ejuſdem terminus v. g. vigeſimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quæſiti, per *Coroll. lemm.* 4. Subſcribe terminis datis numeros naturales ab unitate, facto initio a cyphra, per *Coroll. cit.*, & duc 80, qui in progreſſione quintum locum occupat, & diſtat a primo locis 4, in ſe ipſum, ejuſque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 diſtabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipſe 80, hoc eſt locis 8 per *lemm.* 4.

Eadem ratione duc 1280 in ſe ipſum, & productum divide per 5, quotus 327680, diſtabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc eſt 16 per *lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quæſiti 19 differat per

defe-

defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index ſit 3, hoc eſt per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigeſimus quæſitus.

Nam cum ex conſtructione terminus 2621440 ſit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices ſunt 16 & 3, ſeu 19, & diviſus ſit per primum terminum 5, diſtabit tot locis a primo termino, quot unitates habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 *per lemm.* 5, hoc eſt locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progreſſione vigeſimus *per Coroll. lemm.* 4. Quod erat &c.

COROLL. Patet idem eſſe quærere datæ progreſſionis terminum 20, ac terminum exponentis, ſeu indicis 19, unitate minoris termino quæſito.

PROPOSITIO VII.

Afferuntur nonnullæ Progreſſionis Geometricæ quæſtiones.

1. QUæritur, quantum frumenti ex uno tritici grano haberi poſſit annis 10, ſi ſupponatur ab uno grano produci poſſe ſingulis annis grana 100, licet revera multo plura produci ſoleant.

Illa ergo 100 grana ſecundo anno producent centies centum grana, nempe 10,000, & ſic deinceps in proportione centupla. Inveniatur hujus progreſſionis decimus, ſeu ultimus terminus, qui *per Propoſ. præc.* erit 10000,0000,0000,0000,0000, hoc eſt unitas cum cyphris 20. A quo ſi auferatur minimus terminus 100,

& reſiduum dividatur per denominatorem proportionis unitate minutum, hoc eſt per 99, & addatur quoto ultimus terminus ſupra inventus, erit omnium granorum ſumma *per Propoſ.* 5.

1000000000111111111000.

Quam nec totius Europæ horrea caperent. Ponamus enim ad unam Romanæ libræ unciam requiri grana 600; ad libram unciarum 12 requiruntur grana 7200. Cum autem Romanum (ut vocant) Rubium ſit pondo librarum 640, requiruntur ad rubium unum grana 4608000; dividatur per hunc progreſſionis ſumma, dabit quotus rubiorum numerum.

2. Rex, cui ex annuo redditu proveniunt ter decies centena millia nummorum argenteorum, ſtatuit ejuſmodi redditus alicui miniſtro locare hoc pacto, ut ſingulis annis per unum menſem ſolvat ſibi primo die aſſem 1, ſecundo die aſſes 2, tertio vero 4, in proportione dupla diebus 30, quæritur ſumma ſolvenda regi.

Inveniatur progreſſionis duplæ ab 1 incipientis terminus 30 per *Propoſ. præc.* erit 536870912, qui duplicetur, & a duplo auferatur unitas; erit aſſium ſumma 1073741823, per *Schol.* 1. *Propoſ.* 5. Ex qua reſectis ad dexteram duabus notis, habetur nummorum argenteorum ſumma.

3. Scheramus Indiæ rex propoſuit Seſſæ Dahir Indo, qui latrunculorum ludum a ſe inventum illi expoſuerat, ut in prœmium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola poſitum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64

perven-

perventum fuiſſet. Leviſſima regi primum viſa res eſt: ſed facto computo ab Arithmeticis, inventum eſt, neque in ejus regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551615. Hoc patet ex dictis per *Prop.* 5. & 6. *hujus*.

Schol. I. *Hanc doctrinam qui noverit, haud mirabitur id, quod ſacra hiſtoria narrat de multitudine filiorum Iſrael, qui egreſſi ſunt de Aegypto. Cum enim eo profecti eſſent non plures, quam* 70, *ita multiplicati ſunt, ut poſt annos* 120, *inde exierint ad ſexies centena millia bellatorum hominum, præter pueros, ſenes, ac mulieres.*

Schol. II. *Admiranda Geometricæ progreſſionis duplæ ab* 1 *incipientis uſque ad terminos* 124 *incluſive incrementa, quot ſcilicet ſcalarum gradibus Romæ ad templum Aracælitanum aſcenditur, proſecutus eſt integro libro Romæ edito an.* 1652. Fr. *Ludovicus Tarîs de Monte Fano Min. Obſerv., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut neſcias, utrum magis Geometricæ progreſſionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.*

Schol. III. *De progreſſione Geometrica infinita per infinitos terminos deſcendentis non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici ſtudium tranſcendat, & per Analyſin ea longe facilius explicetur.*

Digitized by Google

PROPOSITIO VIII.

Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.

Combinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo rerum numero, v. gr. octo alphabeti literis, quæritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter ſe valeant combinari; hoc eſt quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illis fieri poſſint.

1. Datæ ſint igitur octo res, ſeu literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, ſcire volo omnes binorum combinationes. Inſtituantur duæ progreſſiones Arithmeticæ naturales deſcendentes, ſubducta unitate a numeris 8 & 2, tot ſcilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariæ dicitur) continet unitates, ut in *A* & *B* factum eſt. Ducantur deinde inter ſe 8 & 7, & productum 56 dividatur per productum 2 X 1, hoc eſt per 2, quotus 28 dat quæſitam binorum multitudinem.

A	*B*	
2	8	
1	7	
2	56	(28

Hoc patet ex ſequenti 8 literarum combinatione.

ab	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*ag*	*ah*
bc	*bd*	*be*	*bf*	*bg*	*bh*	
cd	*ce*	*cf*	*cg*	*ch*		
de	*df*	*dg*	*dh*			
ef	*eg*	*eh*				
fg	*fh*					
gh						

II. Sci-

Digitized by Google

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iiſdem 8 literis haberi poſſint. Inſtituantur, ut ſupra factum eſt, duæ progreſſiones Arithmeticæ deſcendentes *C* & *D*, & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerorum ternorum, qui petitur.

C	D	
3	8	
2	7	
1	6	
6	336	(56

Coroll. Eadem methodo inveniuntur omnes quaternarii, quinarii, ſenarii &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellarum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum ſortito extrahantur, binarii *per hanc Propoſ.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quinarii 43949268; unde difficillima in hujuſmodi ludis divinandi ratio ſatis apparet.

PROPOSITIO IX.

Ex dato rerum numero permutationes omnes poſſibiles invenire.

Permutationes, quas datus rerum numerus ſubire poteſt, inveniuntur hoc pacto.

Sumantur tot numeri in ſerie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot ſunt res datæ, v.g. quinque literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, productum ex terminis ſeriei naturalis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quæſitus, ut in *A* & *B* patet. Nam ſi dentur duæ tantum literæ *a*, *b*, poſſunt bis permutari, ſi quælibet ſemel primum locum, vel ſecundum occupet, ut *ab*, *ba*. Si dentur

tres

Digitized by Google

tres *a*, *b*, *c* permutari poſſunt ſexies. Quælibet enim occupare poteſt ſemel unum locum, & reliquæ duæ, ut modo dictum eſt, bis permutari. Nam cum *c* tenet ultimum locum, poſſunt duæ reliquæ *a*, *b*, mutari bis, ac proinde habentur duo diverſi ordines *abc*, *bac*. Rurſus *b* occupante ultimum locum, permutari poſſunt bis duæ *a*, *c*; & ſic duo novi exurgunt ordines *acb*, *cab*. Denique ſi *a* teneat ultimum locum, reliquæ duæ *c*, *b* bis permutari valent, unde rurſus alii duo habentur ordines *bca*, *cba*. En ſimul omnes trium literarum *a*, *b*, *c* permutationes.

A	B
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
120	

abc, *acb*, *bca*,
bac, *cab*, *cba*.

Eodem diſcurſu oſtenditur literas quatuor *a*, *b*, *c*, *d*, permutationes 24 admittere; literas quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, permutationes 120 &c.

Coroll. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

Tot tibi ſunt Virgo dotes, quot ſydera Cælo.

octo verbis conſtans, ſubire poſſe permutationes 40320.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, ſeu quot modis, variato ordine, diſponi poſſint alicujus vocabuli literæ, ut *Roma*; cujus anagrammata ſunt *Amor*, *Mora*, *Maro*, *Ramo*, *Armo* &c.

Schol. *Quod ſi in dato vocabulo duæ ſint literæ eædem, ut in voce* Paulus, *in qua bis reperitur* u; *permutationum numerus, ut ſupra, inventus dividatur per numerum*

Digitized by Google

merum permutationum, quas ſubire poſſunt literæ, ſeu res ſimiles, quotus dabit numerum permutationum quæſitum. Sic ejuſdem vocis literæ, ſeu Paulus, ſubirent permutationes 720: duæ ſunt literæ ſimiles, quæ admittunt permutationes 2; dividatur itaque 720 per 2, quotus 360 dat permutationum numerum.

PROPOSITIO X.

Proponuntur aliqua Permutationum problemata.

I. SUnt Convictores 12, qui communi menſa utuntur, & quotidie ſinguli accumbendi locum variant, quæritur, quot annis abſolvetur iſthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12 progreſſionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. invenietur per *Prop. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas ſi dividas per dies 365 habebis annorum ſummam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia neceſſaria erunt ad omnes ejuſmodi permutationes ſcribendas, etiamſi mille ſcriptores exiſtant, qui quotidie paginas 40 ſcribant.

Inveniatur *per Propoſ. præc.* permutationum ſumma ex literis 24, quæ ex Tacquet eſt 620, 448, 401, 733, 239, 439, 360, 000. Duc 40 in 1000, productum 40, 000 dat numerum paginarum ſingulis diebus ſcribendum. Duc deinde 40, 000 in dies 365, & per productum 14, 600, 000 divide prædictam permutationum ſummam, quotus dabit numerum annorum quæſitum.

3. Ex

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, ſeu chori ſunt 9: quilibet chorus continet *6666* legiones, & legio quælibet Angelos *6666*, proinde omnium Angelorum numerus eſt 399, 920, 004; quæritur quot fieri poſſint Angelorum permutationes, ſeu quot modis ordinem inter ſe variare valeant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

PROPOSITIO XI.

Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus; tres numeros Harmonice proportionales invenire.

1. Ducatur primus Arithmetice proportionalis datus in ſecundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet ſecundus Harmonicus.

3. Denique ſecundus Arithmeticus in tertium ductus tertium Harmonicum producet.

Sit exemplum. Proportio Arithmetica 2, 3, 4, efficit Harmonicam 6, 8, 12.

Similiter proportio Arithmetica 3, 7, 11. efficit Harmonicam 21, 33, 77.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.

DUC primum numerum datum in ſecundum, & productum divide per duplum primi minutum ſecundo, hoc eſt per differentiam dupli primi a ſecundo, quotus erit tertius harmonice proportionalis.

Dati ſint 3 & 4, quæritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc 3 x 4, & productum 12 divide per 6 — 4, hoc eſt per 2, quotus 6 dat numerum quæſitum. Similiter dati ſint 6 & 8, quæritur tertius harmonicus. Duc 6 x 8, & productum 48 divide per 12 – 8, ſeu 4, quotus 12 eſt tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

PROPOSITIO XIII.

Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.

DAtus ſit numerus ex. gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos eſſe in proportione harmonica manifeſtum eſt. Nam

60 . 20 :: 60 – 30 . 30 – 20.
30 . 15 :: 30 – 20 . 20 – 15.
20 . 12 :: 20 – 15 . 15 – 12.
15 . 10 :: 15 – 12 . 12 – 10.

Q Hinc

Hinc patet haberi progreſſionem terminorum harmonice proportionalium.

Schol. I. *Harum trium propoſitionum demonſtrationes ad Analyſin ſpecioſam remittimus, unde facillime eruuntur, quæ alioquin per viam ſyntheticam ſunt operoſæ.*

Schol. II. *Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, ſeu Muſicam conſtituere dicantur, eſt nimirum quia conſonantias Muſicas conſtituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus 3, 4, 6 inter 6 & 4 eſt proportio ſeſquialtera, conſtituens conſonantiam, quæ* Diapente, *ſeu* Quinta *dicitur. Item inter 4 & 3 eſt proportio ſeſquitertia, conſtituens conſonantiam, quam* Diateſſeron, *ſeu* Quartam *vocant. Denique inter extremos 6 & 3 habetur proportio dupla, quæ* Diapaſon, *ſeu* Octavam *conſonantiam efficit.*

Schol. III. *Datur etiam proportio* Contr-harmonica, *quæ habetur, cum datis tribus terminis, differentia pr mi, & ſecundi eſt ad differentiam ſecundi, & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic 3, 5, 6 ſunt numeri contrharmonice proportionales: nam 2, differentia primi, & ſecundi termini, eſt ad 1, differentiam ſecundi, & tertii, ut 6 ad 3. Item 12, 10, 6 ſunt contrharmonice proportionales; nam 2 . 4 :: 6 . 12. Hæc dicta ſint in gratiam eorum, qui Muſicam amant, aut inſtrumentis Muſicis ſtudent, ut hinc numerorum ſcientiam ſibi maxime neceſſariam intelligant.*

APPENDIX

De Logarithmis, eorumque natura, atque uſu.

CUM triangulorum reſolutio, quæ per ſinus, tangentes, & ſecantes habetur, abſolvi debeat per regulam Proportionum, in qua multiplicatio, & diviſio, ob numeros ſeptem, vel octo characteribus conſtantes, multum laboris, & tædii importare ſolet; hinc eſt, quod Joannes Neperus Scotus, vir numquam ſatis laudandus, alios numeros pro ſinibus, tangentibus, & ſecantibus excogitavit, & anno 1620 promulgavit, quorum ope ſola additio præſtat omne id, quod præſtare ſolebat multiplicatio, & ſubtractio idem efficit, quod diviſio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & uſum hic breviſſime explicamus.

LEMMATA.

I. IN progreſſione Arithmetica quatuor terminorum ſumma duorum extremorum æquatur mediorum ſummæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit $4+1=2+3$.

Coroll. I. Hinc ut habeatur quartus Arithmetice proportionalis, ex ſumma ſecundi, & tertii termini aufertur terminus primus, reſiduum dat quartum Aritmetice proportionalem quæſitum.

II. In progreſſione Arithmetica trium terminorum, ſumma duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati ſint 2, 5, 8, erit $2 + 8 = 10$.

Coroll. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habeatur tertius, ex duplo ſecundi aufertur primus. Sic $10 - 2 = 8$.

Coroll. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, ſi accipiatur eorum ſummæ ſemiſſis. Sint dati 2 & 8, eorum ſummæ ſemiſſis 5 eſt medius Arithmetice proportionalis, ut patet.

PROPOSITIO I.

De natura Log-morum, eorumque inventione.

Log-mi ſunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, ſeu reſpondentes numeris Geometrice proportionalibus: vel ſunt numeri, qui Arithmeticam, ubi ii, quorum iſti ſunt Log-mi, Geometricam ſervant proportionem. Ut ſi concipiatur ſeries quæcunque numerorum Geometrice proportionalium, ut in *A*, cui reſpondeat alia ſeries numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui creſcant ut in *B*; & *C*, vel decreſcant, ut in *D*; omnes hi numeri *B*, *C*, *D* dicuntur Log-mi numerorum in *A* exiſtentium.

A

A	*B*	*C*	*D*	*M*	*N*
1	1	3	100	1	0.0000000
2	2	5	90	10	1.0000000
4	3	7	80	100	2.0000000
8	4	9	70	1000	3.0000000
16	5	11	60	10000	4.0000000
32	6	13	50	100000	5.0000000
64	7	15	40	1000000	6.0000000
128	8	17	30	10000000	7.0000000
256	9	19	20	100000000	8.0000000
512	10	21	10	1000000000	9.0000000
1024	11	23	0	10000000000	10.0000000

Quamvis autem Log-morum ſpecies poſſit aſſumi ad libitum, ut diximus, præſtantiſſima tamen, & commodiſſima eſt illa, quæ cyphram, ſeu o ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliquibus cyphris, nempe octo, vel ſeptem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progreſſione Arithmetica procedentibus, ſeu Log-mis illæ cyphræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de ſinu toto reſpectu ſinuum, tangentium, & ſecantium, utque calculus facilior evadat.

Coroll. I. Ex eo quod Log-mus unitatis ſit o, ſequitur Log-mum numeri, qui ſit minor unitate, ut ſunt fractiones, minorem eſſe quam o, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & deſignatur nota —

Coroll. II. Omnes Log-mi numerorum ab 1 ad 10 excluſive habent o pro prima nota: qui ſunt inter 10, & 100 habent pro primo numero 1; qui vero ſunt inter

ter 100, & 1000 habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & ſic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5 &c. dicuntur *characteriſtici*, ſive *indicativi*: nam indicant quot figuris conſtat numerus abſolutus, cujus eſt Log-mus, & puncto ab aliis ſeparantur.

Coroll. III. Characteriſtica ſemper unitate minor eſt numero figurarum numeri abſoluti. Hinc dato quovis numero abſoluto v. g. 82050 quinque figurarum, ſtatim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteriſtica, & ſic de aliis.

PROPOSITIO II.

Si Log-mus unitatis ſit 0, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.

Sit factum 24, cujus factores ſunt 4 & 6, erunt quatuor termini Geometrice proportionales, *ex Defin. multiplicat.*, 1. 4. : : 6. 24, eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, ex *Propoſ.* 1. Sed Log-mi extremorum 1, 24, æquantur Log-mis 4, 6, *per lem.* 1. Log-mus autem unitatis ex hypotheſi eſt 0; ergo ſi Log-mus unitatis ſit 0, Log-mus facti æquatur ſummæ ex Log-mis efficientium 4, & 6. Quod erat &c.

Coroll. I. Hinc ſequitur, Log-mum numeri compoſiti plani, ſeu ſolidi æqualem eſſe aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel ſolidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur ſummæ Log-morum 3 & 24, aut 6 & 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus conſurgit numerus 72. Co-

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum eſſe Log-mi ejus radicis, & Log-mum cubi triplum Log-mi ſuæ radicis: nam factores quadrati, & cubi ſunt idem numerus bis, vel ter ſumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuſcunque, x^2, x^3, x^4 &c. dividas per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4 &c. habebis Log-mum radicis ejuſdem dignitatis. Contra ſi Log-mum datæ radicis multiplices per exponentem alicujus dignitatis habebis Log-mum ejuſdem dignitatis. Sit $x^3 = 8$, ejuſque Log-mus ex tabulis 0.9030900: divide per exponentem 3 hunc Log-mum, quotus 0.3010300 erit Log-mus reſpondens radici 2; ſi vero Log-mum 0.3010300 multiplices per exponentem 3, habebis 0.9030900 Log-mum dignitatis x^3, ſeu cubi 8.

PROPOSITIO III.

Si Log-mus unitatis eſt 0, differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum.

Sint duo numeri 24 & 6, & differentia eorum Log-morum ſit 0.6020600, dico hanc eſſe Log-mum quoti eorumdem, nempe 4. Nam cum ſit diviſor ad dividendum, ex *Defin. diviſ.*, ut unitas ad quotum, erunt quatuor termini Geometrice proportionales 6. 24 : : 1. 4 eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo, per *lemm.* 1. *bujus*, Log-mi numerorum 24, & 1 æquan-

tur

tur Log-mis extremorum 4 & 6; ſed ex hypotheſi Log-mus unitatis eſt 0, ergo ſi ex Log-mo numeri 24 auferatur Log-mus diviſoris 6, Log-mus reſiduus, ſeu differentia Log-morum 24 & 6, erit æqualis Log-mo quoti, nempe 0.6020600, qui reſpondet numero 4, nempe quoto. Quod &c.

COROLL. Hinc habetur, ſummam Log-morum diviſoris, & quoti æqualem eſſe Log-mo dividendi.

PROPOSITIO IV.

Numeri cujuſcunque Log-mum invenire.

INveniendus ſit Log-mus numeri 7. Statuatur progreſſio Geometrica 1, 10, 100, 1000 &c. & aſſumantur Log-mi his terminis reſpondentes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000 &c. eo modo, quo dictum eſt in *Propoſ.* 1. *hujus*. Deinde unitatem *A*, & denarium *B* auge tot cyphris, quot placuerit, ut 7, 8, 9 &c. (hic cyphræ 6 adduntur) & inter *A* & *B* inveniatur medius proportionalis Geometricus *C*, *per Prop.* 11. *Cap.* 5. *Arithm.* erit hic minor numero ſeptenario, qui etiam intelligi debet auctus tot cyphris, quot aucta fuit unitas, nempe ſex. Inveniatur ergo inter *C* minorem

A	1.000000	0.0000000
C	3.162278	0.5000000
B	10.000000	1.0000000
C	3.162278	0.5000000
D	5.623413	0.7500000
B	10.000000	1.0000000
D	5.623413	0.7500000
E	7.498942	0.8750000
B	10.000000	1.0000000

norem, & *B* majorem alius Geometrice proportionalis *D*, *per Propoſ. cit.*, qui pariter cum ſit minor, quam 7.000000, poterit inter ipſum *D* minorem, & *B* majorem inveniri medius Geometrice proportionalis *E*, nempe 7.498942, qui major eſt ipſo 7.000000; ideoque inter ipſum *E*, & proxime minorem *D* inveniatur medius Geometrice proportionalis *F*, qui minor eſt ipſo *E*; proinde inter *F* & *E* inveniri poteſt medius *G*, qui adhuc minor eſt ipſo *E*. Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem, inveniuntur medii Geometrice proportionales *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* &c. donec tandem occurrat medius proportionalis *Z* = 7.000000, qui nullo penitus exceſſu, vel defectu differt ab ipſo numero ſeptenario.

Deinde ſicuti inter *A* & *B*

D	5.623413	0.7500000
F	6.493816	0.8125000
E	7.498942	0.8750000
F	6.493816	0.8125000
G	6.978306	0.8437500
E	7.498942	0.8750000
G	6.978306	0.8437500
H	7.233942	0.8593750
E	7.498942	0.8750000
G	6.978306	0.8437500
I	7.104974	0.8515625
H	7.233942	0.8593750
G	6.978306	0.8437500
K	7.041355	0.8476562
I	7.104974	0.8515625
G	6.978306	0.8437500
L	7.009760	0.8457031
K	7.041355	0.8476562
G	6.978306	0.8437500
M	6.994015	0.8447266
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
N	7.001883	0.8452148
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
O	6.997936	0.8449707
N	7.001883	0.8452148

inventus fuit medius Geometrice proportionalis *C*, ſic inter eorum Log-mos inveniatur medius Arithmetice proportionalis, *per Coroll. 2. lemm. 2.*, nempe 0.5000000. Erit hic Log-us ipſius numeri *C*. Eodem modo reperiri debent omnes alii Log-mi mediis Geometrice proportionalibus *D*, *E*, *F*, *G* &c. reſpondentes: quo facto habebis Log-mum numeri dati 7, nimirum 0.8450980.

CoROLL. Hac methodo inveniuntur Log-mi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c. Suppetunt tamen modi, quibus tantus labor imminuitur. Nam invento Log-mo numeri v.g. 9, ſi hunc dividas, ſemiſſis dat Log-mum numeri 3, *per Coroll.* 2 & 3. *Propoſ.* 2. *hujus*. Item invento Log-o numeri 6, habetur Log-us numeri 2, nam ſi dividas 6 per 3, quotus eſt 2; ſubtracto igitur Log-o numeri 3

O	6.997936	0.8449707
P	6.999915	0.8450928
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8450928
Q	7.000899	0.8451538
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8450928
R	7.000407	0.8451233
Q	7.000899	0.8451538
P	6.999915	0.8450928
S	7.000161	0.8451080
R	7.000407	0.8451233
P	6.999915	0.8450928
T	7.000038	0.8451004
S	7.000161	0.8451080
P	6.999915	0.8450928
V	6.999977	0.8450966
T	7.000038	0.8451004
V	6.999977	0.8450966
X	7.000007	0.8450985
T	7.000038	0.8451004
V	6.999977	0.8450966
Y	6.999992	0.8450975
X	7.000007	0.8450985
Y	6.999992	0.8450975
Z	7.000000	0.8450980
X	7.000007	0.8450985

a Log-o

a Log-o numeri 6, reſiduum dat Log-um quoti 2, *per Propoſ.3. bujus*. Pariter ſubtrahendo Log-um numeri 2 modo inventum a Log-o numeri 10, habetur Log-us quoti 5, *per Prop. 3. cit.*, & ſic proportionaliter de aliis.

Coroll. Inventis Log-mis numerorum primorum, facile habentur Log-mi numerorum compoſitorum. Nam ſi Log-um binarii duples, triples, quadruples &c. habebis Log-mos totius ſeriei 2, 4, 8, 16, 32 &c. ſi idem facias cum Log-mo ternarii, habebis ſeriem Log-morum pro numeris 3, 9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compoſitus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi ſupponuntur jam cogniti, ſi addas eorum Log-mos, habebis Log-os omnium numerorum compoſitorum, *per Prop.2. bujus*. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-um, præter characteriſticam, ut vides in *A* & *B*.

	A		*B*
1	0.0000000	3	0.4771212
10	1.0000000	30	1.4771212
100	2.0000000	300	2.4771212
1000	3.0000000	3000	3.4771212

Schol. *Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, ſeu abſolutis ab* 1 *uſque ad* 20000, *&* *a* 90000 *uſque ad* 100000 *primus conſtruxit Henricus Briggius Anglus in Academia Oxonienſi ex conſilio Jo: Neperi primi horum inventoris. Lacunam inter* 20000, *&* 90000 *mox implevit Adrianus Ulacq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab* 1 *uſque ad* 10000.

PROPOSITIO V.

Multiplicare duos numeros, qui minores ſint quam 10000.

SInt multiplicandi inter ſe duo numeri 144, & 64, quorum Log-i ex tabulis 2.1583625, & 1.8061800, quæritur factum. Adde ſimul duos Log-os inventos, ſumma dabit Log-mum 3.9645425, cui in tabulis reſpondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144, & 64.

Demonſtr. patet ex *Prop.* 2. *hujus*.

SCHOL. *Si ſumma duorum Logarithmorum ſuperet* 4.0000000, *qui eſt maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus.*

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum minorem, quam 10000 *per alium dividere.*

SIT numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis eſt 3.9645425. Diviſor ſit 64, cujus Log-mus eſt 1.8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi ſubtrahe Log-mum diviſoris, Log-mus reſiduus, nempe 2.1583625, in tabulis quæſitus dat quotum 144.

Demonſtr. patet ex *Prop.* 3. *hujus*.

SCHOL. *Cum Log-mus ille reſiduus non invenitur in tabulis præciſe, ſignum eſt, quoto minutiam aliquam adhærere, quæ quanta ſit, reperietur, ut mox docebimus.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.

SInt dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus ſecundi addatur Log-mo tertii, & a ſumma ſubtrahatur Log-mus primi. Log-us reſiduus dat in tabulis numerum quæſitum.

Demonſtr. patet ex *lemm.* 1.

PROPOSITIO VIII.

Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, ſed numerum 10,000,000 *non excedentibus.*

SIT numerus datus 923754, cujus Log-mus quæritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex reſiduis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cyphris, quot ſunt ipſæ figuræ reſiduæ, nempe $\frac{54}{100}$.

2. Log-mus jam inventus ſubtrahatur a Log-mo proxime ſequenti, nempe a Log-mo numeri 9238

Num. 9238, *Log.* 3.9655779
Num. 9237, *Log.* 3.9655309

Diff. Log. —— 470

3. Dic

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Logmorum 470 ad quartum proportionalem 253 $\frac{80}{100}$.

4. Adde 253 (fractio negligi poteſt) Log mo primum invento, fiet Log-mus 3.9655562.

5. Tandem characteriſtica tot unitatibus augeatur, quot ſunt cyphræ in diviſore (ut hic 2) erit Log-mus quæſitus 5.9655562.

Demonſtr. Certum eſt, quod ſi numerus 9237 creſceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis eſt differentia duorum Log-orum ſe integra unitate ſuperantium: ſed creſcit tantum $\frac{54}{100}$, nam diviſus per 100, quotus eſt 9237 $\frac{54}{100}$; ergo per regulam proportionum inquirendum eſt, quantum augeri debeat Log-mus ejuſdem numeri 9237 ratione earum partium $\frac{54}{100}$, quæ quidem minus ſunt, quam integra unitas, ſeu $\frac{100}{100}$. Inſtituta itaque regula proportionum, invenitur Logarithmum primo inventum, nempe 3.9655309, augendum eſſe partibus 253, fitque Logmus 3.9655562 pro numero 9237 $\frac{54}{100}$.

Demum characteriſtica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cyphræ fuerunt in diviſore (ut hic 2) ob diviſorem 100. Nam numerus datus cum diviſus ſit per 100, eſt numerus quotus: ſed *per Coroll. Prop. 3. hujus*, ſumma Log-morum diviſoris, & quoti æqualis eſt Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Log-us dividendi 923754, addi debet Log-o quoti 3.9655562 Log-us diviſoris 100, nempe 2.0000000, quod, ut compendioſius fiat, ſatis eſt augere characteriſticam duabus unitatibus, ut patet.

Coroll. Si daretur numerus major, quam 10,000,000 (quod

(quod in praxi vix contingit) hæc regula non ſufficeret. Nam creſcentibus numeris abſolutis, differentiæ Log-morum decreſcunt, ita ut tandem evaneſcant, & fiant omnino æquales ipſi Log-mi. Sic numeri 2656385774, & 2656385775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log-mum 9.4242911, ut ex tabulis majoribus Brigii apparet. Ideoque inſtitui non poſſet regula proportionum, cum deſit differentia Log-morum.

Coroll. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log-mi ſupputati ad denarii Log-mum 1.0000000, ut in tabulis communibus factum eſt, ſunt inter ſe æquales. Quapropter ſi daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, ſufficeret pro ejus Logmo ſumere Log-um primarum decem figurarum; quod notaſſe valde utile erit.

Schol. *Si numerus datus dividi poteſt per quoſcunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam* 10000, *ſumma Log-morum diviſoris, & quoti dat Log-mum numeri dati. Sit numerus datus* 12456, *divide per* 3, *fit* 4152, *adde ſimul Log-mos numeri* 3, *nempe* 0.4771212, *& Log-mum numeri* 4152, *nempe* 3.6182573, *ſumma* 4.0953785 *dat Log-mum dati numeri.*

Similiter ſit numerus datus 98796, *divide per* 2 *fit* 49398, *& hunc iterum per* 2 *fit* 24699, *& hunc per* 3 *fit* 8233, *qui minor eſt quam* 10000; *adde ſimul Log-os omnium diviſorum* 2, 2, 3, *ſeu* (*idem enim eſt*) per Coroll. 1. Propoſ. 2. hujus, *ſume Log-mum numeri ſolidi compoſiti ex* 2, 2, 3, *ideſt* 12, *qui eſt* 1.0791812, *cui adde Log-mum ultimi quoti, nempe* 8233, *qui eſt* 3.9155581: *ſumma* 4.9947393 *eſt Log-mus dati numeri* 98796.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Datæ fractionis Log-mum invenire.

1. SUbtrahe Log-um numeratoris e Log-mo denominatoris, & reſiduo Log-mo præpone ſignum ſubtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis $\frac{2}{5}$.

$$\begin{array}{l} Log.\ 5. = 0.6989700 \\ Log.\ 2. = 0.3010300 \\ \hline Log.\ \frac{2}{5} = -0.3979400 \end{array}$$

2. Si fractionis datæ numerator ſit major denominatore, ut $\frac{9}{5}$ ſubtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; reſiduum dat Log-mum quæſitum.

$$\begin{array}{l} Log.\ 9. = 0.9542425 \\ Log.\ 5. = 0.6989700 \\ \hline Log.\ \frac{9}{5} = 0.2552725 \end{array}$$

3. Si vero fractio data integris adhæreat, integra reducantur in unam fractionem, & eodem modo habebitur Log-mus, ut $3\frac{2}{7}$ fiant $\frac{23}{7}$ erit.

$$\begin{array}{l} Log.\ 23 = 1.3617278 \\ Log.\ 7 = 0.8450980 \\ \hline Log.\ 3\frac{2}{7} = 0.5166298 \end{array}$$

Simi-

Similiter quæritur Log-mus numeri $354\frac{3}{4}$, reduc numerum datum ad fractionem, erit $\frac{1419}{4}$; & aufer Logmum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Log-mus quæſitus.

$$\begin{aligned} Log.\ 1419 &= 3.1519824 \\ Log.\ 4 &= 0.6020600 \\ \hline Log.\ \tfrac{1419}{4} &= 2.5499224 \end{aligned}$$

Ratio regulæ eſt, quia cum fractio ſit quotus proveniens ex diviſione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti eſt æqualis, *per Propoſ. 3. hujus*. differentiæ Log-morum diviſoris, & dividendi, ideſt numeratoris, & denominatoris; ideoque ubi numerator minor eſt denominatore, ac proinde per eum dividi non poteſt, Log-mus major e minori ſubtrahendus eſt: quo in caſu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis ſignum negativum —. Quod &c.

Log-mus integri cum fracto poteſt etiam haberi ſic. Sit numerus datus $3560\frac{3}{4}$, ſume differentiam Log-morum numeri 3560, & numeri 3561 proxime ſequentis; cujus prioris numeri Log-mus eſt 3.5514500; ſecundi numeri eſt 3.5515720, differentia erit 1220. Dic jam per regulam proportionum, ut 4 ad 3, ita 1220 ad 915. Adde 915 Log-mo numeri 3560, nempe 3.5514500, habebis Log-mum integri cum fractione, ſc. 3.5515415. Quod &c.

S PRO-

PROPOSITIO X.

Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non exiſtit, invenire numerum ei reſpondentem.

SI characteriſtica dati Log-mi ſit 0, 1, vel 2, mutetur in 3, & quæratur inter 1000, & 10000 Log-us, qui ſit proxime minor Log-mo dato, habebitur numerus quæſitus, tot fractiones decimales adjunctas habens, quot unitates characteriſticæ acceſſerunt.

Sit datus Log-us 1.9201662, qui non reperitur exacte in tabulis, characteriſtica 1 fiat 3, erit 3.9201662. Quære hunc inter 1000, & 10000, invenies numerum 8320 reſpondentem Log-mo 3.9201233, qui eſt proxime minor Log-mo dato, ut patet. Numerus ergo quæſitus erit 83 $\frac{20}{100}$, ob duas videlicet unitates, quibus aucta fuit characteriſtica.

Si Log-mus datus habeat characteriſticam 3, & non reperiatur accurate in tabulis, ut Log-us 3.5163954, erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 reſpondentem Log-mo 3.5162709, qui eſt proxime minor Log-mo dato.

2. Subtrahe hunc Logarithmum a proxime ſequenti 3.5164031, & fiet differentia prima 1322.

3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipſomet Log-mo dato, erit ſecunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad ſecundam 1245, ita denominator futuræ fractionis ad libitum aſſumptus

100,

100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94, erit ergo numerus quæſitus Log-mi dati 3283 $\frac{94}{100}$.

Demonſtr. Eodem fere modo, quo *Prop.* 8. *hujus*. Nam differentia Log-morum prima eſt differentia unitatis, quæ ita ſe habet ad differentiam ſecundam, Log-mi ſcilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Log-morum differentiæ ſunt minores, ac proinde, quæ capienda eſt pars proportionalis, ibi exactior habetur.

Schol. *Ubi tamen in minimis ſcrupuloſi non ſumus, ad praxim ſatis eſt ſumere numerum reſpondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejuſmodi negligere.*

PROPOSITIO XI.

Dato Log-mo defectivo, numerum ei reſpondentem invenire.

Sit datus Log-mus defectivus — 0.2218488, quæritur, quæ fractio ei reſpondeat,

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel 1000, vel 10000, e cujus Log-mo 2.0000000, vel 3.0000000, vel 4.0000000 ſubtrahe datum Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum reſpondentem Log-mo reſiduo 2.7781512, qui dat 600 pro numeratore quæſitæ fractionis; habes ergo $\frac{600}{1000}$, ſeu $\frac{3}{5}$.

Log. num. 1000 = 3.0000000
Log. def. = − 0.2218488

Log. reſ. = 2.7781512, *qui dat* 600.
Eſt ergo $\frac{600}{1000}$, *ſeu* $\frac{3}{5}$.

Similiter ſit Log-mus defectivus − 0. 3679767, quem ſubtrahe ex 4.0000000, reſiduum 3. 6320233 in tabulis quæſitum dat 4825 pro numeratore fractionis. Habes ergo $\frac{4285}{10000}$.

Log. num. 10000 = 4. 0000000
Log. def. = − 0.3679767

Log. reſid. = 3. 6320233, *qui dat* 4285 *proxime*

Eſt ergo $\frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}$.

Demonſtr. ut *Propoſ.* 9.

PROPOSITIO XII.

Dato Log-mo excedente Log-mum 4. 0000000 *numerum ei congruum invenire.*

1. A Dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut ſcilicet reſiduum ſit proxime minus Log-mo 4.0000000, qui eſt tabularum maximus.

2. Quæratur ex tabulis numerus conveniens huic reſiduo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus abla-

ablatus fuit a Log-mo dato, factum eſt numerus quæſitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7.8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc eſt 4.0000000, relinquetur Log-mus 3.8372413, cui ex tabulis reſpondet numerus 6874 cum fractione $\frac{5032}{10000}$, *per Propoſ.* 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæſitus 68745032.

Log. 7.8372413
Log. 4.0000000

Log. 3.8372413, *qui dat* 6874 $\frac{5032}{10000}$

Duc in 10000, *fit* 68745032.

Similiter ſit datus Log-mus 8.2718416, ex quo aufer Log-mum 4.0000000; remanet 4.2718416, qui adhuc major eſt, quam 4.0000000. E reſiduo igitur Log-mo 4.2718416 rurſus aufer 1.0000000, remanet 3.2718416, cui ex tabulis reſpondet numerus 1870, quem multiplica per 10000, & ulterius per 10, factum 187000000 erit numerus quæſitus.

Demonſtr. Subducere Log-mum numeri 10, 100, 1000 &c. a Log-mo dato, eſt idem ac numerum quæſitum dividere per 10, vel 100, vel 1000 &c. erit ergo diviſor 10, vel 100 &c. ad dividendum, quem voco Z, ut unitas ad quotum; ergo *per Prop. 3. hujus*, differentia Log-morum diviſoris, & dividendi, (hoc eſt in ſecundo exemplo Log-mus 3.2718416) æquatur Log-mo quoti, cui ex tabulis reſpondet numerus 1870. Cum igitur ſint proportionalia 100000 ad Z, ita 1 ad 1870; duo extrema ad invicem multiplicata æqualia ſunt

mediis

medils per *Prop.* 16. *lib.*6. *Eucl.*, ideſt $Z = 187000000$. Quod erat &c.

SCHOL. *Cum reſiduum ex diviſione ſuperat dimidium diviſoris, additur quoto unitas. Sic in priori exemplo pro quoto* 5031, *ſumitur* 5032. *Nam diviſis* 3180000 *per* 632 *remanet* 408. *Quod pro hujuſmodi calculis nota. Quæ ſequuntur*, Trigonometriæ *doctrinam ſupponunt*.

PROPOSITIO XIII.

Dati cujuſcunque Sinus Log-mum invenire.

UT Log-mi Sinuum accuratiores inveniantur, ſupponitur Sinus conſtructos fuiſſe ad radium ſaltem 10000000000, & tribus deinde ultimis notis multatos, quales ſunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic Sinus ex. gr. grad. 5 ſupputatus ad Sinum totum 10000000000 eſt 871557427, qui in tabulis multatus reperitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet conſiderari debeat tanquam numerus aliquis abſolutus, & vulgaris, Log-mi Sinuum quorumcunque habentur per *Prop.* 8. *hujus*. Sed ut facilior, & accuratior quoque ſit eorum inventio, neceſſe erit ad manum habere majorem Log-morum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri poteſt, notas aſcendant.

Log-mi autem Sinuum reſpicere debent Sinus ipſos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, reſpectu ſcilicet ad ſinum totum 10000000000. Sinus itaque ex gr. grad. 5 qui in tabulis Ulacq eſt 871557, habet pro ſuo Log-mo 8.9402960. Pari-

Pariter grad. 61, sò Sinus eſt 8815782, Log-mus vero 9.9452609. Ex characteriſtica enim, quæ ſemper unitate minor eſſe debet numero figurarum ipſius ſinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit ſinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus grad. 23, qui ſupputatus ad Sinum totum 10000000000 eſt 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Log-morum, numerus qui reſondeat quinque notis ad ſiniſtram, cujus Log-mus eſt 4.5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop.* 8., inventa differentia Log-morum numeri 39073, & 39074 proxime ſequentis, quæ eſt 111; dic ut 100000 ad 111, ita notæ reſiduæ dati Sinus 11284 ad quartum proportionalem, nempe 12, qui ſi addatur Log-mo jam invento 4.5918768, prodit Log-us quæſitus, hoc eſt 9.5918780, mutata characteriſtica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus, atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

Coroll. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10.0000000, ex quo ſi Log-mus aliquis auferatur, reſiduum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut ſi ex ipſo Sinu toto 10.0000000 auferatur Log-mus Sinus grad. 23, nempe 9.5918780, reſiduum 0.4081220 dicitur complementum Arithmeticum ejuſdem Sinus.

PROPOSITIO XIV.

Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium dati arcus.

Tangentium, & Secantium Log-mi inveniri poſſunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, ſed compendioſius habentur ſic: Su-

Sume Log-mum Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A ſumma aufer Log-mum complementi ejuſdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, reſiduus erit Log-mus Tangentis quæſitus. Inveniendus ſit Log-mus Tangentis grad. 23.

Adde Log. ſin. 23 =	9.5918780
Log. ſin. tot. =	10.0000000
Summa	19.5918780
Log. complem.	9.9640261
Tangen. Log.	9.6278519

Demonſtr. patet ex *Prob.6.* Trigonometriæ Tacquet, in qua oſtenſum fuit, ita ſe habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejuſdem arcus, ut Sinus totus ad Tangentem quæſitam: quæ ut inveniatur, additur ſecundus, & tertius terminus, & a ſumma ſubtrahitur primus *per Prop. 7. hujus*.

At pro inveniendis Secantibus dati arcus, dupla Log-mum Sinus totius, & ex duplo aufer Sinum complementi ejuſdem arcus, reſiduum dat Log-mum Secantis quæſitæ. Quæritur Log-mus Secantis pro arcu grad. 23.

Log. ſin. tot. =	10.0000000
	2
Ejus duplum =	20.0000000
Log. ſin. compl. =	9.9640261
Secan. Log. =	10.0359739

De-

Demonſtr. ex *Prob. 6. cit.* deducitur. Nam ſunt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæſita, ut ibi oſtenditur. Ut ergo habeatur tertius Arithmetice proportionalis, illis reſpondens, hoc eſt Log-mus Secantis, ex duplo ſecundi termini aufertur primus, *per Cor.* 1. *lemm.2.*

Coroll. I. Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus, Tangentis, vel Secantis, ſignum eſt, illum præter minuta prima, continere etiam ſecunda, quæ ſi quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop.* 10. pro inveniendis fractionibus. Quod ſi ea diligentia opus non ſit, ſatis erit ſumere gradus cum minutis primis, quæ Log-o proxime minori reſpondent.

Coroll. II. In Tab. Ulacq. Log-mi Sinuum non habent Characteriſticam majorem, quam 9. Proinde ſi, calculo abſoluto, ex Log-morum additione reſultet Characteriſtica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a ſiniſtris abjicitur, fitque Characteriſtica 0, 2, 5 &c.

Coroll. III. Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45 minores ſunt. A gradibus vero 45 uſque ad 90 Log-morum Tangentes non habent Characteriſticam majorem 13. Idcirco ſi, poſt additionem factam, Characteriſtica duabus conſtet figuris, tunc vel ſecunda figura excedit 3, & in hoc caſu abjicitur prima, ſive ſit unitas, ſive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima, ut in *B* patet.

A	*B*
Tang. Log. 24.6040812	*Tang. Log.* 21.2162581
fit 4.6040812	*fit* 11.2162581

SCHOL. I. *Regula Trium etiam per ſolam Log-morum additionem poteſt abſolvi, ſi ſumatur prioris termini complementum Arithmeticum*, per Cor. Prop. 13, *& ad duos reliquos addatur. Dati ſint tres numeri proportionales* 4, 60, 25, *quæritur quartus. Prioris numeri* 4 *complementum Arithmeticum eſt* 9.3979400, *addatur ad Log-os duorum numerorum* 60 *&* 25, *ſumma dabit Log-um quæſitum*.

Num. 4 *Compl. Arithm.*		9.3979400
Num. 60	*Log.*	1.7781512
Num. 25	*Log.*	1.3979400
	Summa	12.5740312

Fit (*per Cor.* 2.) 2.5740312, *dat in Tab.* 375.

SCHOL. II. *Si Sinus totus ſit primus, vel unus ex terminis regulæ Trium, poteſt omitti: nam in primo caſu eſt* 0; *& in ſecundo addit unitatem mox delendam*.

SCHOL. III. *Log-mi Sinuum vocantur abſolute Log-mi, ſed Log-mi Tangentium peculiari nomine* Meſologarithmi, *& Log-mi Secantium* Tomologarithmi. *In tabulis inveniri non ſolent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui poſſunt, ut vidimus, vel quia ſine ipſis calculus bene poteſt inſtitui. Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus ſecundus, & ab aliis* Coſinus. *Tangens, & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans ſecunda, vel* Cotangens, *&* Coſecans: *quæ nomina ſi ignorentur, auctores Trigonometrici difficile intelliguntur.*

SCHOL. IV. *Log-morum uſus patet in omnem fere Matheſin. Nos pauca hic Problemata delibabimus. Plura videri poſſunt apud Ulacq, Cavalerium, & alios.*

PROBL.

PROBL. I.

Dati numeri quadratum, vel cubum per Log-mos invenire.

1. Datus ſit numerus v. g. 18, cujus quadratum quæritur. Duplica numeri dati Log-mum, ſumma dabit Log-mum quadrati quæſiti.

Num. 18, *Log.* 1.2552725
1.2552725

Summa 2.5105450, *dat in Tab. quadr.* 324

2. Pro inveniendo ejuſdem numeri 18 cubo, ſume ter, ſeu multiplica per 3 Log-mum ipſius numeri, productum dabit Log-mum cubi quæſiti.

Num. 18, *Log.* 1.2552725
3

3.7658175, *dat in Tab. cubum* 5832

Coroll. Hinc apparet ratio, cur ad extrahendam ex quocunque dato numero radicem quadratam, vel cubicam, accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata, aut tertia pars pro radice cubica; cum quadratum ex Log-mo bis ſumpto, cubus vero ex Log-mo ter ſumpto prodeat. Item quarta, quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis.

Digitized by Google

PROBL. II.

Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales.

1. INveniendus ſit medius proportionalis inter 20, & 320. Adde eorum Log-os, dimidiæ ſummæ Log-mus dat medium proportionalem quæſitum 80.

Num. 20, *Log.* 1.3010300
Num. 320, *Log.* 2.5051500
Summæ Log. 3.8061800
Dimidium Log. 1.9030900, *dat in Tab.* 80.
Eſt autem ∺ 20, 80, 320.

2. Inveniendi ſint inter duos numeros datos duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii proportionales, regula generalis eſt: aufer Log-mum numeri minoris ex Log-mo numeri majoris, & hujus reſidui tertiam partem, ſi duo medii quærantur; vel quartam, ſi tres; vel quintam, ſi quatuor, adde Log-mo numeri minoris, ſummæ Log-mus dabit in Tab. medium proportionalem, qui proxime conſequitur numerum datum minorem.

3. Ut habeantur medii proportionales reliqui, adde ſummæ præcedenti eandem tertiam, vel quartam, vel quintam Log-mi partem, ſumma dabit in Tab. reliquos medios proportionales quæſitos, ut exempla, quæ ſequuntur, rem ſatis illuſtrant. Signa + & — additionem, & ſubtractionem indicant. Q vero Log-mum quoti addendum.

2. In-

2. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

Num. 120, *Log.* 2.0791812
Num. 15, *Log.* — 1.1760913
Reſid. 0.9030899
Divid. per 3, *dat* *Q.* 0.3010299

Num. 15, *Log.* + 1.1760913
Summæ Log. 1.4771212, *dat in Tab.* 30.

Q. Log. + 0.3010299
Summæ Log. 1.7781511, *dat in Tab.* 60.
Sunt ergo ÷ 15, 30, 60, 120, *ut patet*.

3. Quæruntur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

Num. 1620, *Log.* 3.2095150
Num. 20, *Log.* — 1.3010300
Reſid. 1.9084850
Divid. per 4, *dat* *Q.* 0.4771212
Adde num. 20 *Log.* + 1.3010300
Summæ Log. 1.7781512, *dat in Tab.* 60.

Q. Log. + 0.4771212
Summæ Log. 2.2552724, *dat in Tab.* 180.

Q. Log. + 0.4771212
Summæ Log. 2.7323936, *dat in Tab.* 540.
Sunt ergo in continua proportione ÷ 20, 60, 180, 540, 1620.

Schol.

Digitized by Google

Schol. *Hæc ſane pulcherrima Log-morum praxis ob ſui facilitatem, & brevitatem mihi tanti eſſe videtur; ut, propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiſcendam eſſe putem. Unum aliquem ejus uſum ex innumeris, qui afferri poſſent, indicabimus in ſequenti* Propoſ. num. 5.

PROBL. III.

Quæſtiones aliquot Arithmeticæ per Log-mos expediuntur.

1. DAntur fœnori ſcuta 500, & ex ſingulis 100 lucrum eſt ſcutorum 5, quæritur quot annis ea ſors duplicabitur.

Ex Log-o numeri 100 ſubtrahe Log-mum numeri 5, Log-mus reſiduus in Tab. dat annos quæſitos.

Num. 100, *Log.* 2.0000000
Num. 5, *Log.* 0.6989700
Log. reſid. 1.3010300, *dat in Tab.* 20.

Quod quidem manifeſtum eſt: nam ſi ſcuta 100 anno 1 dant 5, ſcuta 500 annis 20 dant 500 per regulam proportionum compoſitam ex *Prop.* 2. *Cap.* 5. *Arithm.*

Coroll. Si tempus, quo ſors illa duplicatur, ut ſupra inventum, dividas per 2, per 4, vel 5 &c. habebis tempus, quo ſortis ejuſdem dimidium, ſeu quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo annos 20 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requiritur ad lucran-

Digitized by Google

crandam ejuſdem ſortis quartam partem ſcuta 125, ut patet.

2. Accepit Cajus aureos 500 cum uſura aureorum 10 ex ſingulis 100 in annum ea lege, ut niſi ſolvat ſingulis annis fiat ex fœnore auctio ſortis. Nihil fuit ſolutum toto triennio. Quæritur quantum debeat, ut propoſitum fuit in *Prop.* 13. *Arithm. n.* 5.

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio ſortis ad ſortem una cum fœnore $\frac{110}{100}$, ſeu $\frac{11}{10}$. Auferatur numeri 10 Log-mus 1.0000000 ex numeri 11 Log-mo 1.0413927, reſiduum, ſeu Log-mus 0.0413927 erit ratio ſortis ad ſortem una cum fœnore unius anni. Sumatur ergo hujus reſidui Log-mus toties, quot ſunt anni (ut hic ter) eique addatur ſortis 500 Log-mus 2.6989700; ſummæ Log-mus 2.8231481 in Tab. quæſitus dabit pro ſorte, & uſura ejus triennii aureos 665 cum dimidio circiter ut in *Propoſ. cit.* fuit inventum.

Num. $\frac{11}{10}$ *Log.* 1.0413927
Log. 1.0000000
Reſid. *Log.* 0.0413927
Anni 3 3
Log. 0.1241781
Sortis 500 *Log.* 2.6989700
Summæ *Log.* 2.8231481, *dat* 665 $\frac{3165}{10000}$.

3. Pupilli alicujus bona, quæ æſtimata fuerunt ſcutorum 1600, accepit Hortenſius pacto augendi quotannis ſortem ex fructibus ad rationem ſcutorum 5 in ſingu-

ſingula centena. Retinuit illa annis 6, menſibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum ſcuta 100 fiant 105, erit proportio ſortis ad ſortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, ſeu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21 Log-mo 1.3222193, reſiduum 0.0211893 erit ratio ſortis ad ſortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 ſumi debet ſexies, ſeu duci in 6, ſitque 0.1271358.

Ut habeantur menſes, ac dies, dividatur Log-mus ille reſiduus 0.0211893 per 12, quotus 0.0017657 dat Log-mum, quinquies ſumendum pro 5 menſibus datis, nempe 0.0088285. Hic deinde diviſus per 30 $\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0.000579, qui ſumendus eſt decies pro diebus10, ſitque 0.0005790. Addatur his Log-us 3.2041200 pro ſorte ſcutorum 1600, habetur ex horum ſumma Log-mus 3.3406633, qui in Tab. quæſitus dat numerum, ſeu ſcuta 2191 pupillo ipſi ab Hortenſio debita.

Pro annis 6	*Log.*	0.1271358
Pro menſ. 5	*Log.*	0.0088285
Pro diebus 10	*Log.*	0.0005790
Pro ſorte 1600	*Log.*	3.2041200

Summa 3.3406633, *dat* 2191.

4. Fingamus eundem Hortenſium debere alteri ſummam illam ſcut. 1600 ſolvendam poſt annos 6, menſes 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, ſiquidem ſcuta 5 ex ſingulis 100 a creditore ſibi relaxentur. Quæritur quantum debeat ſolvere.

Hæc

Hæc quæſtio eadem ratione ſolvitur, dummodo ex Log-mo 3.2041200 ſortis 1600 auferatur ſumma Logmorum pro annis 6, menſibus 5, & diebus 10, ut ſupra inventa, nempe 0.1365433. Nam reſiduus Logmus 3.0675767 in Tab. quæſitus dat ſummam ſolvendam ſcut. 1168.

Pro annis 6	*Log.*	0. 1271358
Pro menſ. 5	*Log.*	0. 0088285
Pro diebus 10	*Log.*	0. 0005790
	Summa	0. 1365433
Scut. 1600	*Log.*	– 3. 2041200
	Reſid.	3. 0675767, *dat in Tab.* 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, reſtituuntur poſt annos ſex una cum annuis uſurarum uſuris, quæ ſimul cum ſorte conficiunt ſummam ſcut. 1340; quæritur ſingulorum annorum uſura cum ipſa ſorte, & quanta fuerit ex ſingulis 100 uſura.

Inveniantur inter duos numeros 1000, & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) *per Probl.* 2. Dabunt illi ſummas quæſitas, hoc eſt ſortem una cum uniuſcunque anni uſura. En totius operationis typus.

Scuta 1340	*Log.*	3. 1271048
Scuta 1000	*Log.*	– 3. 0000000
	Reſid.	0. 1271048
Divide per 6,	*dat* Q.	0. 0211841

Log-mus ſextæ partis, quem voco $\mathfrak{Q}$. addatur primum Log-mo ſortis 1000, ſumma dabit Log-mum pro ſorte, & uſura primi anni *A*. Adde deinde huic ſummæ Log-mum ipſum $\mathfrak{Q}$, nova ſumma dabit Log-mum pro ſorte, & uſura ſecundi anni *B*; & ſic deinceps addendo præcedenti ſummæ Log-mum eundem $\mathfrak{Q}$, aggregatum dat Log-um pro ſorte, & lucro annorumm *C*, *D*, *E* &c.

	Log.	3.0000000		
$\mathfrak{Q}$. *Log.* +		0.0211841		*A*
	Log.	3.0211841	*dat ſc.* 1050	
$\mathfrak{Q}$. *Log.* +		0.0211841		*B*
	Log.	3.0423682	*dat ſc.* 1102	
$\mathfrak{Q}$. *Log.* +		0.0211841		*C*
	Log.	3.0635523	*dat ſc.* 1157	
$\mathfrak{Q}$. *Log.* +		0.0211841		*D*
	Log.	3.0847364	*dat ſc.* 1215	
$\mathfrak{Q}$. *Log.* +		0.0211841		*E*
	Log.	3.1059205	*dat ſc.* 1276	
$\mathfrak{Q}$. *Log.* +		0.0211841		*F*
	Log.	3.1271046	*dat ſc.* 1340	

Inventa autem uſura primi anni *A* una cum ſorte, ſcutis ſcilicet 1050, ſtatim innoteſcit quanta fuerit ex ſingu-

lis

lis 100 uſura. Nam ſi 1000 fiunt 1050, ſcuta 100 per regulam proportionum fiunt 105, adeoque uſura fuit ſcut. 5 ex ſingulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur *ex Coroll.* 13. *Cap.* 5. *Arithm.*, *& ex præc. Probl.*

PROBL. IV.

Data tormenti bellici elevatione, diſtantiam ictus invenire, & e converſo.

1. Experientia conſtat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli ſemirecti, ſeu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo ſemirecto æqualiter diſtantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales eſſe. Sit igitur experimento cognitum, ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, exploſum fuiſſe globum ad diſtantiam paſſuum 4000; quæritur, quanta futura ſit diſtantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi ſervata) ad datam elevationem gr. 30.

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut ſinus totus ad ſinum anguli 30 duplicati, ſeu 60, ita paſſus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Schol.*1.*&* 2. *Prop.* 14.

Gr. 60, *Log.* 9.9375306
Paſſ. 4000, *Log.* 3.6020600

Summa 13.5395906

Fit (*Cor.*2.*Prop.*14) 3.5395906, *dat paſſ.* 3464.

 2. Quod

2. Quod ſi e converſo data ſcopi diſtantia, ex. gr. paſſuum 1500, ad quem ictus eſt dirigendus, quæratur in ipſomet tormento elevationis angulus; fiat ut diſtantia maximi ictus, ex.gr. paſſus 4000, ad elevationem gr. 45, ita diſtantia data paſſuum 1500 ad angulum elevationis quæſitæ. Itaque duplicato angulo 45, ut in primo caſu factum eſt, erit per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Paſſ. 4000 *Compl. Arithm.* 6. 3979400
Paſſ. 1500 *Log.* 3. 1760913

Summa 9. 5740313, *dat gr.* 22. 1.

SCHOL. *Quam ſingulari facilitate per Log-mos confici poſſint Tabulæ, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari poſſint, quæque ad utranque hujus problematis partem maxime inſerviant, facile eſt intelligere.*

PROBL. V.

Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.

STatue in plano aliquo horizontali ſtylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipſum planum, qui diviſus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Kalendaria innoteſcit) metire umbram, quam projicit ſtylus; ſitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum ſtylus continet 100. Erit per *Probl.* 5. *Tacquet Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad ſtyli longitudinem

100,

100, ita longitudo ipſius umbræ, prout eſt Sinus totus, ad longitudinem ſtyli, prout eſt Tangens anguli altitudinis Solis, ſeu Aequatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 20, nempe *per Schol.* 1. *&* 2. *Prop.* 14.

Long. 89. *Compl. Arithm.* 8.0506100
Long. 100 *Log.* 2.0000000

Tangens 10.0506100, *dat gr.* 48.19.

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41.40, eſt altitudo Poli Urbis Romæ quæſita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inventa eſt gr. 41. 54, ſeu gr. 42 proxime. Proinde Aequatoris altitudo Romæ eſt gr. 48.

Schol. I. *Ceterum plures ſunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per ſtellas, elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam ſit maxime neceſſarium, & Aſtronomiæ univerſæ ſit veluti baſis, ac fundamentum.*

Schol. II. *Ut habeantur altitudines meridianæ ſignorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Aequatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Aſtronomicis paſſim occurrunt. Sic declinatio Solis in principio ſignorum Borealium* ♉ *&* ♍ *eſt gr.* 11.30. *Hos adde ad Aequatoris altitudinem, quæ Romæ, ut dictum, eſt gr.* 48, *erit altitudo meridiana Solis* ♉ *&* ♍ *initium ingreſſi gr.* 59.30. *Quod ſi altitudinem meridianam Solis quæras pro initio ſignorum Auſtralium* ♐ *&* ♒, *ſubtrahe ab Aequatoris altitudine, nempe ex. gr.* 48, *eorum*

eorum declinationem, quæ eſt gr. 20. 12, *reſiduum dat gr.* 27. 48 *pro altitudine meridiana quæſita.*

PROBL. VI.

In linea meridiana Zodiaci ſigna deſcribere.

DUcta in aliquo plano horizontali linea meridiana, prout in elementis Sphæricis docetur, quam ſingulis diebus Sol per foramen exiguum tranſiens, in ipſo meridiei momento tangat, deſcribenda ſint in illa Zodiaci ſigna, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoſcendum tempus, quo Sol ea ſigna ingreditur, atque percurrit.

Metire altitudinem gnomonis, ſeu muri uſque ad foramen illud, per quod Sol tranſit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet menſura. Tum inventis altitudinibus meridianis ſignorum Cœleſtium, *per Schol.* 2. *Probl.* 5, habebis earum complementa, & complementorum ipſorum Meſolog-mos, ſeu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout eſt Sinus totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis ſigni, ſeu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus diſtabit ab initio lineæ meridianæ ſigni cœleſtis locus in ipſamet linea meridiana deſignandus.

Sit exemplum Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani juſſu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Franciſco Blanchino ejuſdem Pontificis Prælato domeſtico

ſtico conſtructus anno 1702; in quo quidem altitudo muri uſque ad foramen, per quod tranſit radius Solaris, eſt unciarum 750 pedis regii Pariſienſis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inſerta eſt. Fingamus huic Zodiaci ſigna ♐ & ♒ (nam bina ſimul deſcribuntur) eſſe a nobis inſcribenda, ſeu quærendum eſſe punctum, quod Sol tangit, ubi ſigna illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem ſignorum eſt gr.27. 48, *per Schol.2. Probl. 5.*, eorumque complementum gr. 61. 12. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10.2598311. Fiat ergo ut altitudo muri, prout eſt Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10.2598311, ita eadem muri altitudo, prout eſt unciarum 750 Log-mus ad Log-mum pro unciis quæſitis. Erit *per Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Complem. Tang.	10. 2598311
Unc. 750 *Log.*	2. 8750613
Summa	13. 1348924

Fit (*Cor.2.Prop.*14.) 3. 1348924, *dat unc.* 1364.

Diſtabunt igitur ſigna ♐ & ♒ a principio lineæ meridianæ unciis 1364 pedis ejuſdem Pariſienſis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci ſignorum in ipſa linea meridiana locus deſignabitur.

FINIS.

Digitized by Google

E R R A T A.

Pag. 40. *lin.* 4. inſuper $\frac{1}{4}$, *lege* $\frac{1}{3}$.
47. *lin.* 18. quinque octavarum, *lege* unius octavæ.
72. *lin.* 7. horis $5\frac{1}{2}$, *lege* $2\frac{1}{7}$.
100. *lin.* 6. $32\frac{1216}{3087}$, *lege* $259\frac{467}{3087}$. Horum ſumma $816\frac{97}{100}$.
101. *lin.* 10. fuerunt anni, *adde* uno minus.
114. *lin.* 5. *lege* 101010101010101010100.
115. *lin.* 22. deſcendentis, *lege* deſcendente.
117. *lin.* 7. numerorum, *lege* numerum
119. *lin.* 20. ſcribant, *adde* & unaquæque contineat permutationes 50.
lin. 23. Duc 40 in 1000, *lege* Duc $40 \times 50 \times 1000$, productum 2000000 dat numerum permutationum &c. quem duc in dies 365, & per productum divide prædictam &c.

Digitized by Google

Digitized by Google